

Nombre: _____

Curso: _____

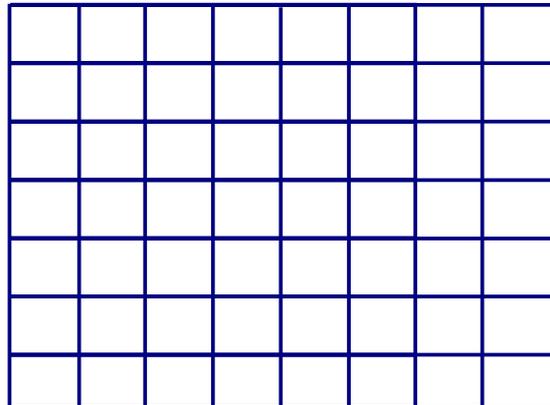
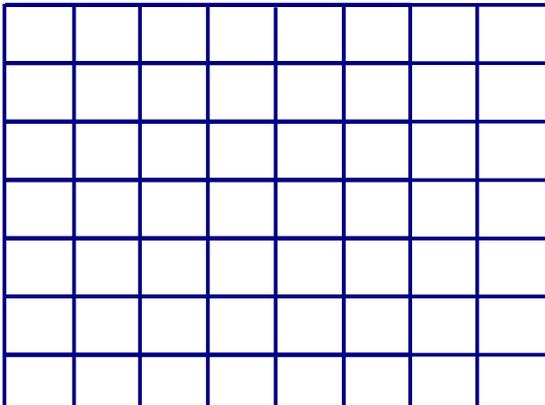
Matemáticas I – Geometría del plano – 20/4/2018

EJERCICIO 1: Consideremos el triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (3, 5)$, $C = (5, 5)$.

- Obtén la ecuación general de la recta AB .
- ¿Cuál es su pendiente? ¿Qué pendiente tendrá una recta perpendicular a ella?
- Halla el área del triángulo.
- Halla la ecuación de la recta altura relativa al vértice C .
- Obtén la ecuación general de la mediatriz del segmento \overline{AB} .
- Obtén la ecuación general de la mediana relativa al vértice B .
- Calcula las coordenadas del punto intersección de éstas dos últimas rectas.

EJERCICIO 2: Dados $r : 5x + 12y - 60 = 0$, $s : 10x + by - 3 = 0$, $P = (a, 2)$:

- Halla los puntos en que r corta a los ejes de coordenadas y dibújala.
- Halla a sabiendo que P dista 2 unidades de la recta r .
- Obtén b sabiendo que r y s son rectas paralelas.



EJERCICIO 3: Dados los vectores $\vec{u} = (0, -2)$, $\vec{v} = (2, 2)$:

- [0,25] Demuestra que $\mathfrak{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una base del plano.
- [0,5] ¿Qué ángulo forman los vectores de dicha base?
- [0,5] Halla el valor de la proyección del primero sobre el segundo.
- [0,5] ¿Qué coordenadas tiene en esa base el vector $\vec{x} = (6, 2)$?
- [0,25] Obtén un vector unitario con igual dirección y sentido a \vec{v} .

EJERCICIO 1:

Consideremos el triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (3, 5)$, $C = (5, 5)$.

a) La recta AB pasa por A con dirección \overrightarrow{AB} :

$$\left. \begin{array}{l} A = (1, 1) \\ \overrightarrow{AB} = B - A = (2, 4) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4}$$

Multiplicando en cruz y trasponiendo:

$$AB : 4x - 4 = 2y - 2 \rightarrow 4x - 2y - 2 = 0 \rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

b) ¿Cuál es su pendiente? ¿Qué ángulo forma con el eje X ?

$$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{2} \rightarrow m = 2$$

Si m' es la pendiente de una perpendicular a ella se cumple:

$$m \cdot m' = -1 \rightarrow 2m' = -1 \rightarrow m' = -\frac{1}{2}$$

c) Para hallar el área del triángulo tomamos como base la recta AB . Así la altura es la distancia del vértice C a la recta AB :

$$base = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

$$altura = d(C, AB) = \frac{|2 \cdot 5 - 5 - 1|}{\sqrt{4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Luego:

$$Superficie = \frac{base \times altura}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}}{2} = 2 \rightarrow Superficie = 5 (u^2)$$

d) Como la altura es perpendicular a la base, buscamos un ortogonal a la base:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 4) \rightarrow \vec{v} = (4, -2)$$

Así, la perpendicular tiene de ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} C = (5, 5) \\ \vec{v} = (4, -2) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x-5}{4} = \frac{y-5}{-2} \rightarrow 4y - 20 = -2x + 10 \rightarrow x + 2y - 15 = 0$$

e) La mediatriz es perpendicular también al segmento \overline{AB} , luego un vector director de ella es $\vec{v} = (4, -2)$. Y pasa por el punto medio:

$$M_{AB} = \frac{A+B}{2} = (2, 3)$$

Luego su ecuación es:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{-2} \rightarrow 2x + 4y - 16 = 0 \rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

f) Para hallar la mediana relativa al vértice B , lo primero es obtener el punto medio del lado opuesto:

$$M_{AC} = \frac{A+C}{2} = (3, 3)$$

La mediana pasa por el vértice B y por ese punto medio:

$$\left. \begin{array}{l} B = (3, 5) \\ \overrightarrow{BM} = M - B = (0, -2) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x-3}{0} = \frac{y-5}{-2} \rightarrow 0 = -2x + 6 \rightarrow x - 3 = 0$$

g) Para obtener el corte de ambas rectas resolvemos el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - 5 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = 3, y = -2,5 \rightarrow P = (3, -2,5)$$

EJERCICIO 2:

Dados $r : 5x + 12y - 60 = 0$, $s : 10x + by - 3 = 0$, $P = (a, 2)$:

a) Hallemos los puntos en que r corta a los ejes de coordenadas:

Corte con eje X: $y = 0 \rightarrow 5x - 60 = 0 \rightarrow x = 12 \rightarrow A = (12, 0)$

Corte con eje Y: $x = 0 \rightarrow 12y - 60 = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow B = (0, 5)$

b) Como $d(P, r) = 2$, aplicando la fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$$\frac{|5a + 12 \cdot 2 - 60|}{\sqrt{25 + 144}} = 2 \rightarrow \frac{|5a - 36|}{13} = 2 \rightarrow |5a - 36| = 26 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5a - 36 = -26 \rightarrow a = 2 \\ 5a - 36 = +26 \rightarrow a = \frac{62}{5} \end{array} \right.$$

c) Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente:

$$\vec{v}_r = (-12, 5) \rightarrow m_r = -\frac{5}{12}$$

$$\vec{v}_s = (-b, 10) \rightarrow m_s = -\frac{10}{b}$$

Igualando:

$$m_r = m_s \rightarrow -\frac{5}{12} = -\frac{10}{b} \rightarrow b = 24$$

EJERCICIO 3:

$$\vec{u} = (0, -2), \vec{v} = (2, 2)$$

a) Basta comprobar que son dos vectores independientes:

$$\frac{0}{2} \neq \frac{-2}{2} \rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ son independientes}$$

b) Si llamamos φ al ángulo:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{0 \cdot 2 - 2 \cdot 2}{\sqrt{0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2}} = -\frac{4}{2\sqrt{8}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \varphi = 135^\circ$$

c) La proyección del primero sobre el segundo

$$p = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = -\frac{4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

d) Si las coordenadas son (s, t) , entonces:

$$\vec{x} = s\vec{u} + t\vec{v} \rightarrow (6, 2) = s \cdot (0, -2) + t \cdot (2, 2) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2t = 6 \\ -2s + 2t = 2 \end{array} \right. \rightarrow \{s = 2, t = 3\}$$

e) El vector unitario de igual dirección y sentido es

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(2, 2)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$