Nombre:____ *Curso*:_____

Matemáticas I – Geometría del plano – 20/4/2018

EJERCICIO 1: Consideremos el triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (3\,, 5)$, $C = (5\,, 5)$.

a) Obtén la ecuación general de la recta AB.

b) ¿Cuál es su pendiente? ¿Qué pendiente tendrá una recta perpendicular a ella?

c) Halla el área del triángulo.

d) Halla la ecuación de la recta altura relativa al vértice C.

e) Obtén la ecuación general de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

f) Obtén la ecuación general de la mediana relativa al vértice B.

g) Calcula las coordenadas del punto intersección de éstas dos últimas rectas.

EJERCICIO 2: Dados $r: 5x + 12y - 60 = 0$, $s: 10x + by - 3 = 0$, $P = (a\,, 2)$:

a) Halla los puntos en que r corta a los ejes de coordenadas y dibújala.

b) Halla a sabiendo que P dista 2 unidades de la recta r.

c) Obtén b sabiendo que r y s son rectas paralelas.

EJERCICIO 3: Dados los vectores $\vec{u} = (0\,, -2)$, $\vec{v} = (2\,, 2)$:

a) [0,25] Demuestra que $\mathfrak{B} = \{\vec{u}\,, \vec{v}\}$ es una base del plano.

b) [0,5] ¿Qué ángulo forman los vectores de dicha base?

c) [0,5] Halla el valor de la proyección del primero sobre el segundo.

d) [0,5] ¿Qué coordenadas tiene en esa base el vector $\vec{x} = (6\,, 2)$?

e) [0,25] Obtén un vector unitario con igual dirección y sentido a $\vec{v}$.

Recuperación: 1 (a,b,e,f,g)+ 2 (a,b,c) + 3

EJERCICIO 1:

Consideremos el triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (3\,, 5)$, $C = (5\,, 5)$.

a) La recta AB pasa por A con dirección $\overrightarrow{AB}$:

$$\left.\begin{array}{r} A = (1\,, 1) \\ \overrightarrow{AB} = B - A = (2\,, 4) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4}$$

Multiplicando en cruz y trasponiendo:

$$AB : 4x - 4 = 2y - 2 \rightarrow 4x - 2y - 2 = 0 \rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

b) ¿Cuál es su pendiente? ¿Qué ángulo forma con el eje X?

$$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{2} \rightarrow m = 2$$

Si m' es la pendiente de una perpendicular a ella se cumple:

$$m \cdot m' = -1 \ \rightarrow \ 2m' = -1 \ \rightarrow \ m' = -\frac{1}{2}$$

c) Para hallar el área del triángulo tomamos como base la recta AB. Así la altura es la distancia del vértice C a la recta AB:

$base = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$altura = \mathrm{d}\,(C\,, AB) = \dfrac{|2 \cdot 5 - 5 - 1|}{\sqrt{4}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Luego:

$$\text{Superficie} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad \text{Superficie} = 5\ (u^2)$$

d) Como la altura es perpendicular a la base, buscamos un ortogonal a la base:

$$\overrightarrow{AB} = (2\,, 4) \rightarrow \vec{v} = (4\,, -2)$$

Así, la perpendicular tiene de ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} C = (5\,, 5) \\ \vec{v} = (4\,, -2) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-5}{4} = \frac{y-5}{-2} \rightarrow 4y - 20 = -2x + 10 \rightarrow x + 2y - 15 = 0$$

e) La mediatriz es perpendicular también al segmento $\overline{AB}$, luego un vector director de ella es $\vec{v} = (4\,, -2)$. Y pasa por el punto medio :

$$M_{\overline{AB}} = \frac{A+B}{2} = (2\,, 3)$$

Luego su ecuación es:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{-2} \rightarrow 2x + 4y - 16 = 0 \rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

f) Para hallar la mediana relativa al vértice B, lo primero es obtener el punto medio del lado opuesto:

$$M_{\overline{AC}} = \frac{A+C}{2} = (3\,, 3)$$

La mediana pasa por el vértice B y por ese punto medio:

$$\left.\begin{array}{r} B = (3\,, 5) \\ \overrightarrow{BM} = M - B = (0\,, -2) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-3}{0} = \frac{y-5}{-2} \rightarrow 0 = -2x + 6 \rightarrow x - 3 = 0$$

g) Para obtener el corte de ambas rectas resolvemos el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x-2y-5=0 \\ x-3=0 \end{aligned}\right\} \rightarrow\ x=3\,,\ y=-2{,}5\ \rightarrow\ P=(3\,,-2{,}5)$$

EJERCICIO 2:

Dados $r: 5x+12y-60=0$, $s: 10x+by-3=0$, $P=(a\,,2)$:

a) Hallemos los puntos en que r corta a los ejes de coordenadas:

Corte con eje X: $y=0\ \rightarrow\ 5x-60=0\ \rightarrow\ x=12\ \rightarrow\ A=(12\,,0)$

Corte con eje Y: $x=0\ \rightarrow\ 12y-60=0\ \rightarrow\ y=5\ \rightarrow\ B=(0\,,5)$

b) Como $\mathrm{d}\,(P\,,r)=2$, aplicando la fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$$\frac{|5a+12\cdot 2-60|}{\sqrt{25+144}}=2\rightarrow\frac{|5a-36|}{13}=2\rightarrow|5a-36|=26\rightarrow\left|\begin{array}{l} 5a-36=-26\rightarrow a=2 \\ 5a-36=+26\rightarrow a=\dfrac{62}{5}\end{array}\right.$$

c) Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente:

$\vec{v}_r=(-12\,,5)\rightarrow m_r=-\dfrac{5}{12}$

$\vec{v}_s=(-b\,,10)\rightarrow m_s=-\dfrac{10}{b}$

Igualando:

$$m_r=m_s\rightarrow-\frac{5}{12}=-\frac{10}{b}\rightarrow b=24$$

EJERCICIO 3:

$\vec{u}=(0\,,-2)$, $\vec{v}=(2\,,2)$

a) Basta comprobar que son dos vectores independientes:

$$\frac{0}{2}\neq\frac{-2}{2}\ \rightarrow\ \{\vec{u}\,,\vec{v}\}\ \text{son independientes}$$

b) Si llamamos φ al ángulo:

$$\cos(\varphi)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{0\cdot 2-2\cdot 2}{\sqrt{0^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2}}=-\frac{4}{2\sqrt{8}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow\varphi=135^\circ$$

c) La proyección del primero sobre el segundo

$$p=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}=-\frac{4}{2\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

d) Si las coordenadas son $(s\,,t)$, entonces:

$$\vec{x}=s\vec{u}+t\vec{v}\rightarrow(6\,,2)=s\cdot(0\,,-2)+t\cdot(2\,,2)\rightarrow\left\{\begin{array}{r} 2t=6 \\ -2s+2t=2\end{array}\right|\rightarrow\{s=2\,,t=3\}$$

e) El vector unitario de igual dirección y sentido es

$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{(2\,,2)}{2\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$