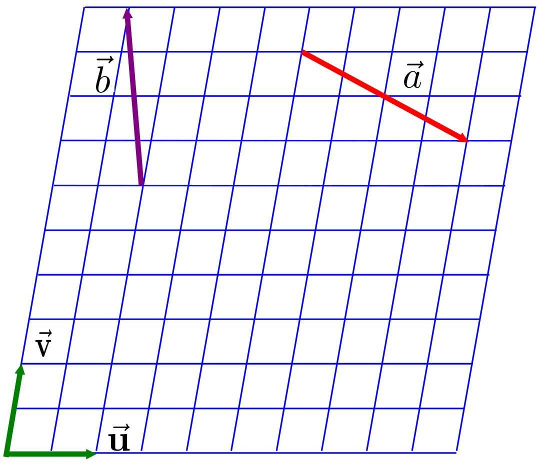
Nombre:____ **Curso**:_____

Matemáticas I – Vectores en el plano – 21/03/2018

EJERCICIO 1: [2] Responde a las siguientes cuestiones, observando los vectores de la figura:



a) ¿Qué significado tiene la palabra "equipolencia"?

b) Dibuja dos vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ linealmente dependientes.

c) ¿Qué es la regla del paralelogramo?

d) Dibuja el vector $3\vec{u}+2\vec{v}$.

e) Obtén razonadamente las coordenadas de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ en la base formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

EJERCICIO 2: Dados los vectores $\vec{u}=(1\,,2)$, $\vec{v}=(0\,,-1)$:

a) [0,75] Demuestra que $\mathscr{B}=\{\vec{u}\,,\,\vec{v}\}$ es una base del plano.

b) [0,75] ¿Qué coordenadas tiene en esa base $\vec{x}=(3\,,4)$?

c) [0,5] ¿Qué componentes tiene vector $\vec{y}$ cuyas coordenadas en $\mathscr{B}$ son $(3\,,-3)$?

EJERCICIO 3: Considera los puntos $A=(1\,,1)$, $B=(3\,,2)$, $C=(2\,,-1)$.

a) [1] Obtén las coordenadas del punto M que divide en dos partes iguales a $\overline{AB}$.

b) [1] Obtén las coordenadas del punto D tal que $ABCD$ es un paralelogramo.

EJERCICIO 4: Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ verificando $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$

a) [0,5] ¿Qué ángulo determinan dichos vectores?

b) [0,75] Calcula $3\vec{b}\cdot\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)$.

c) [0,75] Halla el módulo o longitud del vector $2\vec{a}-\vec{b}$.

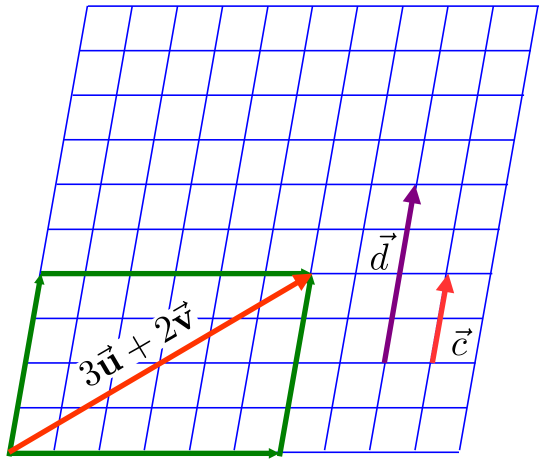
EJERCICIO 5: Sean $\vec{a}=(x\,,10)$, $\vec{b}=(-1\,,2y)$, $\vec{c}=(5\,,12)$.

a) [0,5] Halla x sabiendo que $\vec{a}\perp\vec{c}$.

b) [0,5] Halla y sabiendo que $|\vec{b}|=3$.

c) [1] Obtén un vector unitario y ortogonal a $\vec{c}$.

EJERCICIO 1:



a) Equipolencia es la propiedad común que tienen las representaciones gráficas de un vector: todas tienen igual dirección, sentido y módulo.

b) Son $\vec{c}$ y $\vec{d}$ linealmente dependientes pues tienen igual dirección. Observemos que:

$$\vec{d} = 2\vec{c}$$

c) La regla del paralelogramo es un procedimiento para sumar dos vectores gráficamente: tras situar ambos sumandos en un origen común y cada uno a continuación del otro, el vector suma es una diagonal del paralelogramo que se forma: la que va del origen común al extremo común (como en el apartado d).

d) Véase en la malla.

e) Las coordenadas de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ en la base formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v} \quad \xrightarrow{coordenadas} \quad (2\,,-1)$$
$$\vec{b} = -0{,}5\vec{u} + 2\vec{v} \quad \xrightarrow{coordenadas} \quad (-0{,}5\,,2)$$

EJERCICIO 2:

a) Basta comprobar que son dos vectores independientes:

$$\frac{0}{1} \neq -\frac{1}{2} \to \{\vec{u}\,,\vec{v}\} \text{ son independientes}$$

b) Pongamos $\vec{x} = s\vec{u} + t\vec{v}$:

$$(3\,,4) = s\cdot(1\,,2) + t\cdot(0\,,-1) \to \begin{cases} s = 3 \\ t = 2 \end{cases}$$

Luego las coordenadas pedidas son $(3\,,2)$

c) Es

$$\vec{y} = 3\vec{u} - 3\vec{v} = 3\cdot(1\,,2) - 3\cdot(0\,,-1) = (3\,,9)$$

EJERCICIO 3:

a) Se trata del punto medio M del segmento. Así:

$$M = \frac{A+B}{2} = (2\,,1.5)$$

b) $ABCD$ es un paralelogramo si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$:

$$D - C = A - B \;\to\; D - (2\,,-1) = (1\,,1) - (3\,,2) \;\to\; D = (0\,,-2)$$

EJERCICIO 4:

a) Si llamamos α a dicho ángulo:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-2}{1\cdot 2} = -1 \rightarrow \alpha = \pi$$

b) Tenemos

$$3\vec{b}\cdot\left(\vec{b}-2\vec{a}\right) = 2|\vec{b}|^2 - 6\,\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 4 - 6\cdot(-2) = 24$$

c) Es

$$|2\vec{a}-\vec{b}|^2 = \left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$$

Así:

$$|2\vec{a}-\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4+4+4+4 = 16$$

Por ello:

$$|2\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{16} = 4$$

EJERCICIO 5:

$$\vec{a} = (x\,,10)\ ,\ \vec{b} = (-1\,,2y)\ ,\ \vec{c} = (5\,,12)$$

a) Tenemos:

$$\vec{a}\perp\vec{c} \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{c} = 0 \rightarrow 5x+120 = 0 \rightarrow x = -24$$

b) Resulta:

$$|\vec{b}| = 3 \rightarrow \sqrt{1^2+(2y)^2} = 3 \rightarrow 1+4y^2 = 9 \rightarrow y^2 = 2 \rightarrow y = \pm\sqrt{2}$$

c) Un vector ortogonal a $\vec{c}$, y de igual módulo, es

$$\vec{n} = (-12\,,5)$$

Como

$$|\vec{n}| = \sqrt{144+25} = 13$$

los dos vectores unitarios y ortogonales a $\vec{c}$ son

$$\frac{1}{13}\vec{n} = \left(-\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right) \ \text{ y } \ -\frac{1}{13}\vec{n} = \left(\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$$