Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas I – Trigonometría – 22/12/2017

EJERCICIO 1: [2,5]

Sea a un ángulo con $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ tal que

$$\cot \frac{a}{2} = \sqrt{5}$$

Calcula el valor exacto de $\operatorname{sen} a$ y $\cos a$.

EJERCICIO 2: [2,5]

Sea α un ángulo del tercer cuadrante cuya tangente es igual a $\dfrac{12}{5}$.

Obtén el valor exacto de:

a) $\cos 2\alpha$

b) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

EJERCICIO 3: [2,5]

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas elementales:

a) $\tan(3x) + 1 = 0$

b) $\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$

EJERCICIO 4: [2,5]

a) La secante del ángulo agudo α es t. Expresa el seno, el coseno y la tangente del ángulo α en función de t.

b) Comprueba que es cierta la siguiente identidad:

$$\operatorname{sen} a\left(1 + \cot^2 a\right) = \frac{2\cos a}{\operatorname{sen} 2a}$$

EJERCICIO 1:

a) El ángulo a es agudo, así su seno es positivo y su coseno negativo.

Observemos que

$$\cot\frac{a}{2}=\sqrt{5}\rightarrow\tan\frac{a}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

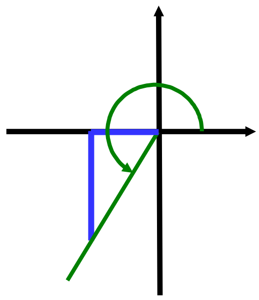
Usamos la fórmula del ángulo mitad:

$$\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\xrightarrow[cuadrado]{al}\frac{1-\cos a}{1+\cos a}=\frac{1}{5}\rightarrow 1+\cos a=5-5\cos a\xrightarrow{despejamos}\cos a=\frac{2}{3}$$

Con la fórmula fundamental obtenemos el seno:

$$\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a=1\ \rightarrow\ \operatorname{sen}^2 a=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\ \rightarrow\ \operatorname{sen} a=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

EJERCICIO 2:



Dibujamos el ángulo y hallamos la hipotenusa r por el Teorema de Pitágoras:

$$r^2=25+144\rightarrow r^2=169\rightarrow r=13$$

Luego:

$$\operatorname{sen}\alpha=-\frac{12}{13}$$

$$\cos\alpha=-\frac{5}{13}$$

a) Ahora calculamos, por la fórmula del ángulo doble:

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a=\frac{25}{169}-\frac{144}{169}=-\frac{119}{169}$$

b) Aplicamos la fórmula de adición:

$$\cos\left(270^\circ+a\right)=\cos 270^\circ\cos a-\operatorname{sen}270^\circ\operatorname{sen}a=0\cdot\left(-\frac{5}{13}\right)-(-1)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{12}{13}$$

EJERCICIO 3:

a) Despejando tenemos

$$\tan(3x)=-1$$

Con la calculadora encontramos que es $\arctan(1)=45^\circ$.

Partiendo de este dato y teniendo en cuenta que la tangente es negativa los cuadrantes segundo y cuarto:

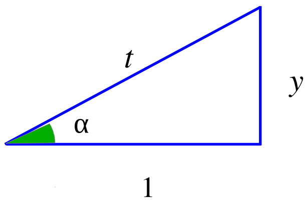
$$\tan(3x)=-1\ \rightarrow\ \begin{cases}3x=135^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow\quad x=45^\circ+n\cdot 120^\circ\\ 3x=315^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow\quad x=105^\circ+n\cdot 120^\circ\end{cases}$$

b) Hay dos ángulos en la primera vuelta que tienen cosen nulo: 90º y 270º. Así:

$$\cos(3x+30^\circ)=0\ \rightarrow\ \begin{cases}3x+30^\circ=90^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow\quad x=20^\circ+n\cdot 120^\circ\\ 3x+30^\circ=270^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow\quad x=80^\circ+n\cdot 120^\circ\end{cases}$$

EJERCICIO 4:

a) Como se tiene que la secante es la hipotenusa entre el cateto contiguo, el ángulo es el dibujado a continuación:



Calculamos, por el teorema de Pitágoras:

$$y^2 + 1^2 = t^2 \;\rightarrow\; y^2 = t^2 - 1 \;\rightarrow\; y = \sqrt{t^2 - 1}$$

Así:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} \;,\; \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{1}{t} \;,\; \tan\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{1} = \sqrt{t^2-1}$$

b) Vamos a desarrollar ambos miembros para comprobar la igualdad:

El primer miembro:

$$\mathrm{I} = \operatorname{sen} a \cdot \left(1 + \frac{\cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a}\right) = \operatorname{sen} a \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a} = \operatorname{sen} a \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{1}{\operatorname{sen} a}$$

El segundo miembro:

$$\mathrm{II} = \frac{2\cos a}{2\operatorname{sen} a \cos a} = \frac{1}{\operatorname{sen} a}$$

Como vemos, son idénticos.