Nombre:________________________________ ***Curso***:_____	
Matemáticas I – Trigonometría – 21/12/2017	

EJERCICIO 1: [2,5]

Sea a un ángulo con $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ tal que

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

Calcula el valor exacto de $\operatorname{sen} a$ y $\cos a$.

EJERCICIO 2: [2,5]

Sea α un ángulo agudo cuya cotangente es igual a $\frac{24}{7}$.

Obtén el valor exacto de:

a) $\operatorname{sen} 2\alpha$

b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

EJERCICIO 3: [2,5]

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas elementales:

a) $2\cos(3x)+1 = 0$

b) $\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

EJERCICIO 4: [2,5]

a) Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\operatorname{sen} 4a - \operatorname{sen} 2a}{\cos 4a + \cos 2a}$$

b) Demuestra que

$$\cos\alpha\left(1 + \tan^2\alpha\right) = \tan\alpha \cdot \csc\alpha$$

EJERCICIO 1:

a) El ángulo a está en el segundo cuadrante, así su seno es positivo y su coseno negativo.

Obtengamos el seno y el coseno de a :

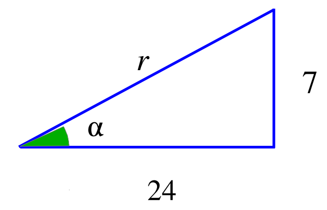
$$\cos\frac{a}{2}=\frac{3}{\sqrt{34}}\rightarrow\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}=\frac{3}{\sqrt{34}}\xrightarrow{al\ cuadrado}\frac{1+\cos a}{2}=\frac{9}{34}\xrightarrow{despejo}\cos a=-\frac{8}{17}$$

Con la fórmula fundamental obtenemos el seno:

$$\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a=1\ \rightarrow\ \operatorname{sen}^2 a=1-\frac{64}{289}=\frac{225}{289}\ \rightarrow\ \operatorname{sen} a=-\frac{15}{17}$$

EJERCICIO 2:

Dibujamos el ángulo y hallamos la hipotenusa por el Teorema de Pitágoras:



$$r^2=49+579\rightarrow r^2=625\rightarrow r=25$$

Luego:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{7}{25}$$
$$\cos\alpha=\frac{24}{25}$$

a) Ahora calculamos, por la fórmula del ángulo doble:

$$\operatorname{sen}(2a)=2\operatorname{sen}a\cos a=2\cdot\frac{7}{25}\cdot\frac{24}{25}=\frac{336}{625}$$

b) Aplicamos la fórmula de adición:

$$\cos\left(270^\circ-a\right)=\cos 270^\circ\cos a+\operatorname{sen}270^\circ\operatorname{sen}a=0\cdot\frac{24}{25}+(-1)\cdot\frac{7}{25}=-\frac{7}{25}$$

EJERCICIO 3:

a) Despejando:

$$\cos\left(3x\right)=-\frac{1}{2}$$

Con la calculadora encontramos que

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=60^\circ$$

Partiendo de este dato y teniendo en cuenta que el coseno es negativa los cuadrantes segundo y tercero:

$$\cos\left(3x\right)=-\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \begin{cases}3x=120^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow\quad x=40^\circ+n\cdot 120^\circ\\ 3x=240^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow\quad x=80^\circ+n\cdot 120^\circ\end{cases}$$

b) Hay dos ángulos en la primera vuelta que tienen seno cero: 0º y 180º. Así:

$$\operatorname{sen}\left(2x+60^\circ\right)=0\ \rightarrow\ \begin{cases}2x+60^\circ=\ \ \ 0^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow\quad x=-30^\circ+n\cdot 180^\circ\\ 2x+60^\circ=180^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow\quad x=\ \ \ 60^\circ+n\cdot 180^\circ\end{cases}$$

EJERCICIO 4:

a) Aplicamos las fórmulas que trasforman sumas en productos:

$$\frac{\operatorname{sen} 4a - \operatorname{sen} 2a}{\cos 4a + \cos 2a} = \frac{2\ \cos\frac{4a+2a}{2}\ \operatorname{sen}\frac{4a-2a}{2}}{2\ \cos\frac{4a+2a}{2}\ \cos\frac{4a-2a}{2}} = \frac{2\ \cos 3a\ \operatorname{sen} a}{2\ \cos 3a\ \cos a} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \tan a$$

b) Vamos a desarrollar ambos miembros para comprobar la igualdad:

$$\mathrm{I} = \cos a \cdot \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a}\right) = \cos a \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a} = \cos a \cdot \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{\cos a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos a}$$

$$\mathrm{II} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} a} = \frac{1}{\cos a}$$

Como vemos, son idénticos.