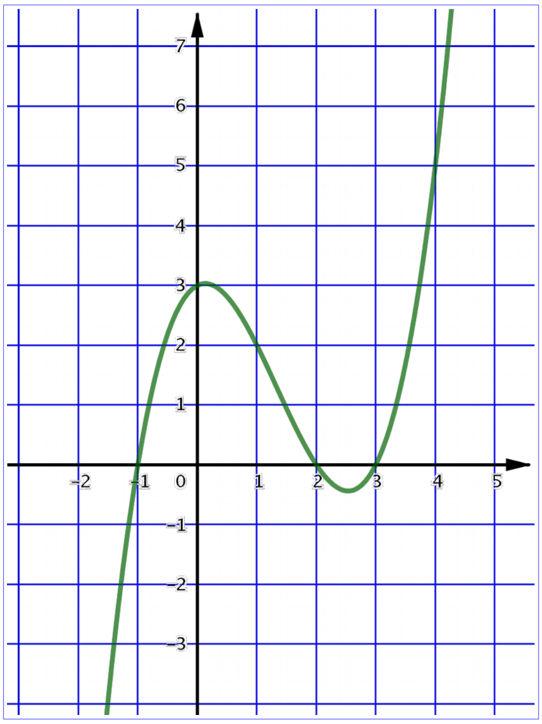
Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas I – Álgebra – 24/11/2017

EJERCICIO 1 [2]: La gráfica de $y = 0.5x^3 - 2x^2 + 0.5x + 3$ es la mostrada:



a) [0,25] Resuelve razonadamente la ecuación:

$$0.5x^3 - 2x^2 + 0.5x + 3 = 0$$

b) [0,75] Estudia el signo de la función $y = 0.5x^3 - 2x^2 + 0.5x + 3$ y deduce la solución de la inecuación:

$$0.5x^3 - 2x^2 + 0.5x + 3 > 0$$

c) [1] Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 0.5x^3 - 2x^2 + 0.5x + 3 \\ y - x = 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 2 [2,5]: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 8^y : 2^x = 1 \\ \ln x + \ln(y+2) = 2\ln 3 \end{cases}$$

EJERCICIO 3 [3]: Averigua para qué valores de x existe

a) $y = \dfrac{x+2}{6x^3 - x^2 - 4x - 1}$

b) $y = \ln\left(16 - x^2\right)$

EJERCICIO 4 [2,5]: Plantea una ecuación o sistema de ecuaciones que permita resolver estos problemas:

a) "Hallemos las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo de área 30 cm² sabiendo que el cateto menor mide ocho centímetros menos que la hipotenusa."

b) "Disponemos de dos tipos de pienso para mezclar: A y B. Si mezclamos 2 kilos de A con 3 kilos de B obtenemos un compuesto a 5,20 euros el kilo, y si realizamos una mezcla a partes iguales obtenemos un compuesto a 5 euros el kilo. Averigüe el precio del kilo de cada pienso."

EJERCICIO 1:

a) Observando los puntos de corte con el eje X : $0.5x^3 - 2x^2 + 0.5x + 3 = 0 \rightarrow x = -1\,, x = 2\,, x = 3$

b) El signo es positivo [negativo] cuando la gráfica está por encima [por debajo] del eje de abscisas:

$$\left.\begin{array}{lcl} x \in (-\infty\,,-1) & \rightarrow & y < 0 \\ x \in (-1\,,2) & \rightarrow & y > 0 \\ x \in (2\,,3) & \rightarrow & y < 0 \\ x \in (3\,,+\infty) & \rightarrow & y > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{y>0} S = (-1\,,2) \cup (3\,,+\infty)$$

c) La segunda ecuación $y = x + 1$ puede interpretarse gráficamente como una recta. Si la dibujamos junto con la curva, la solución del sistema son los puntos donde ambas gráficas se cortan. Hay tres soluciones:

$$(x\,,y) = (-1\,,0)\ ,(1\,,2)\ ,(4\,,5)$$

EJERCICIO 2:

Quitemos exponenciales: $8^y : 2^x = 1 \rightarrow 2^{3y} : 2^x = 1 \rightarrow 2^{3y-x} = 2^0 \rightarrow 3y - x = 0$

Quitemos logaritmos: $\ln x + \ln(y+2) = 2\ln 3 \rightarrow \ln x\,(y+2) = \ln 3^2 \rightarrow x\,(y+2) = 9$

Ahora resolvemos por sustitución (despejamos de la primera ecuación y sustituimos en la segunda):

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3y - x & = & 0 \xrightarrow{\text{despejo } x} 3y = x \\ x\,(y+2) & = & 9 \xrightarrow[sustituyo]{} 3y\,(y+2) = 9 \rightarrow 3y^2 + 6y - 9 = 0 \rightarrow y = 1\,, y = \cancel{-3} \end{array}\right.$$

Luego el sistema tiene sólo una solución: $\{x = 3\,, y = 1\}$.

EJERCICIO 3:

a) En este caso el denominador no puede ser cero. Resolvamos la ecuación

$$6x^3 - x^2 - 4x - 1 = 0$$

Es inmediato comprobar que $x = 1$ es un cero ($6 \cdot 1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = 0$). Dividiendo entre $(x-1)$:

$$6x^3 - x^2 - 4x - 1 = (x-1) \cdot \left(6x^2 + 5x + 1\right)$$

Ahora ya podemos encontrar fácilmente todas las soluciones:

$$(x+1) \cdot \left(6x^2 + 5x + 1\right) = 0 \rightarrow \left|\begin{array}{l} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ 6x^2 + 5x + 1 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{1}{2}\,, x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Tenemos así que x no puede ser igual a esos números:

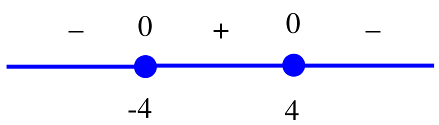
$$\mathbb{D} = \mathbb{R} - \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$$

b) Debe ser

$$16 - x^2 > 0$$

Ceros: $16 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

Estudiando el signo:

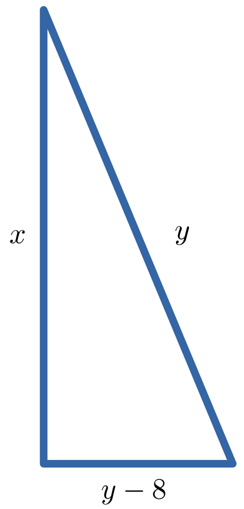


Luego el dominio es

$$\mathbb{D} = (-4\,,4)$$

EJERCICIO 4:

a) Llamemos x a la longitud (cm) del cateto mayor e y a la de la hipotenusa. Así el cateto menor será $y-8$.



Área igual a 30 $\rightarrow$ $\dfrac{x\cdot(y-8)}{2}=30 \rightarrow x\,(y-8)=60$

Por el T. de Pitágoras $\rightarrow$ $x^2+(y-8)^2=y^2$

Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} x\cdot(y-8)=60 \\ x^2+(y-8)^2=y^2 \end{cases}$$

Nota: resolviendo con Geogebra obtenemos $\{x=12\,,y=13\}$. Así que los lados miden 5, 12 y 13 cm, respectivamente.

b) Llamemos x al precio, en euros, del kilo de pienso A e y al del pienso B.

2 kilos a x euros el kilo de A + 3 kilos a y euros el kilo de B son 5 kilos de mezcla a 5,20 euros el kilo:

$$2x+3y=5\cdot 5.20$$

1 kilo a x euros el kilo de A + 1 kilo a y euros el kilo de B son 2 kilos de mezcla a 5 euros el kilo:

$$x+y=2\cdot 5$$

Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} x+\ \ y=10 \\ 2x+3y=26 \end{cases}$$

Nota: resolviendo con Geogebra obtenemos $\{x=4\,,y=6\}$. Así que los el kilo de café A cuesta 4 € y el de café B cuesta 6€.