Nombre:____ *Curso*:_____	
Matemáticas I – Prueba de Septiembre	

EJERCICIO 1:

a) [1] Calcula a qué número hay que elevar 7 para obtener 2. Y obtén sus cuatro primeras cifras decimales.

b) [1] Plantea algebraicamente el siguiente problema: "Obtén las dimensiones de un rectángulo que tiene de perímetro 28 cm y cuya diagonal mide 100 cm"

EJERCICIO 2:

Consideremos la función de segundo grado $y = x^2 - 4x + 3$

a) [1] ¿Para qué valores de x es $y > 0$?

b) [1] Averigua en qué puntos se intercepta su gráfica con la recta de ecuación $2x + y - 3 = 0$.

EJERCICIO 3:

En un triángulo dos de sus lados miden 2 y 3 cm, respectivamente, y el ángulo comprendido mide 60º. Halla

a) [1] Su perímetro.

b) [1] Su área.

EJERCICIO 4:

Consideremos los puntos $A(1\,,2)$, $B(4\,,6)$, $C(7\,,1)$.

a) [0,5] Halla la medida del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

b) [0,75] Obtén la ecuación de la perpendicular a la recta AB por el punto C.

c) [0,75] Determina el área del triángulo que determinan.

EJERCICIO 5:

Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \dfrac{3x}{x+1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) [0,5] Estudia la continuidad de la función.

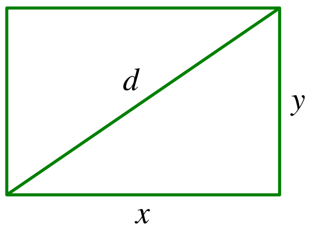
b) [1] Calcula la derivada directamente para $x \neq 2$, y determina las derivadas laterales para $x = 2$. ¿Es derivable la función para este valor?

c) [0,5] Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función para $x = 1$.

EJERCICIO 1:

a) Sea x ese número: $\quad 7^x = 2 \;\rightarrow\; x = \log_7 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 7} = 0.3562\ldots$

b) Llamemos x a la longitud (en cm) de la base e y a la longitud (en cm) de la altura.



Como el perímetro es 28 cm:

$$2x + 2y = 28$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma:

$$x^2 + y^2 = 10^2$$

Tenemos que resolver el sistema

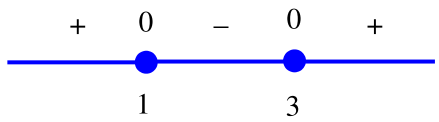
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 14 \\ x^2+y^2 & = & 100 \end{array}\right.$$

EJERCICIO 2:

a) $x^2 - 4x + 3 > 0$

Ceros: $\qquad x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1\,, x = 3$

Estudiando el signo:



Así, x debe estar en

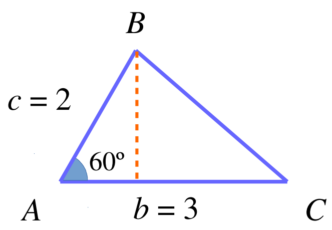
$$S = (-\infty\,, 1) \cup (3\,, +\infty)$$

b) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambas gráficas:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 3 \\ 2x + y - 3 = 0 \rightarrow y = 3 - 2x \end{array}\right\} \xrightarrow[igualando]{} x^2 - 4x + 3 = 3 - 2x \;\rightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0\,, x = 2$$

Luego se cortan en los puntos $\{x = 0\,, y = 3\}\;, \{x = 2\,, y = -1\}$.

EJERCICIO 3:



Calculemos el otro lado por el T. de los cosenos:

$$a^2 = 9 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 7 \rightarrow a = \sqrt{7}$$

Así, el perímetro:

$$p = 5 + \sqrt{7} \approx 7.65 \text{ cm}$$

Para hallar el área sacamos primero la altura relativa al vértice A:

$$\frac{h}{2} = \operatorname{sen} 60^\circ \rightarrow h = 2 \operatorname{sen} 60^\circ$$

El área es:

$$\mathscr{A} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 2 \operatorname{sen} 60^\circ}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; \mathscr{A} \approx 2.6\ldots$$

EJERCICIO 4:

a) Veamos la medida del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3\,,4)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(6\,,-1)\end{array}\right\}\rightarrow \cos\varphi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}=\frac{14}{5\sqrt{37}}\rightarrow\varphi\approx 62^\circ 35' 33''$$

b) La perpendicular a la recta AB por el punto C.

$$\left.\begin{array}{r}C=(7\,,1)\\ m_{AB}\cdot m=-1\rightarrow m=\dfrac{-1}{4/3}\rightarrow m=-\dfrac{3}{4}\end{array}\right\}\rightarrow y-1=-\frac{3}{4}\,(x-7)\rightarrow 3x+4y-25=0$$

c) Para hallar el área, tomemos como base la recta AB:

$$\left.\begin{array}{r}A=(1\,,2)\\ \overrightarrow{AB}=(3\,,4)\end{array}\right\}\rightarrow\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}\rightarrow 4x-4=3y-6\rightarrow 4x-3y+2=0$$

La base es la longitud de $\overrightarrow{AB}$ y la altura es la distancia del vértice C a la recta base AB:

$$base=|\overrightarrow{AB}|=|(3\,,4)|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$altura=\mathrm{d}\,(C\,,AB)=\frac{|28-3+2|}{\sqrt{2}5}=\frac{27}{5}$$

Luego:

$$\text{Superficie}=\frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}=\frac{5\cdot\dfrac{27}{5}}{2}\quad\rightarrow\quad\text{Superficie}=13.5\ (u^2)$$

EJERCICIO 5:

a) <u>Continuidad</u>: f sólo puede ser discontinua para $x=2$ (separa-fórmulas). Veamos qué ocurre en él:

$x=2$

VALOR: $f\,(2)=2$

TENDENCIAS: $\left\{\begin{array}{l}f\,(2-)=2^2-2=2\\ f\,(2+)=\dfrac{6}{3}=2\end{array}\right.$

Concluimos que es continua en $x=2$.

b) Podemos derivar directamente si $x\neq 2$:

$\mathscr{D}\left(x^2-x\right)=2x-1$

$\mathscr{D}\left(\dfrac{3x}{x+1}\right)=\dfrac{3\cdot(x+1)-1\cdot 3x}{(x+1)^2}=\dfrac{3}{(x+1)^2}$

Luego:

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{ccc}2x-1 & \text{si} & x<2\\ \dfrac{3}{(x+1)^2} & \text{si} & x>2\end{array}\right.$$

Para $x = 2$, como es continua, podemos hallar las derivadas laterales así: $\begin{cases} f'(2-) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \\ f'(2+) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que no es derivable para este valor (se trata de un punto anguloso)

c) La ecuación de la recta tangente para $x = 1$ es

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

Sustituyendo, obtenemos $f(1) = 0$ y $f'(1) = 1$. Así que la fórmula nos queda:

$$y - 0 = 1(x - 1) \ \rightarrow \ y = x - 1$$