Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas I – Trigonometría, Complejos y Vectores

EJERCICIO 1:[2]

Sea a un ángulo con $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ tal que

$$\cos\frac{a}{2} = t$$

Expresa, en función de t:

a) $\operatorname{sen} a$ y $\cos a$.

b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)$

EJERCICIO 2:[2]

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{sen}\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

EJERCICIO 3:[1,5]

Resuelve la siguiente ecuación en el campo complejo:

$$x^3 - 2x^2 + 16x - 32 = 0$$

EJERCICIO 4:[1,5]

Consideremos los números complejos

$$u = 11 + 13i \ , \ v = 3 - i$$

Calcula:

a) $3u - 4v$

b) $u \cdot \overline{v}$

c) $\frac{u}{v}$

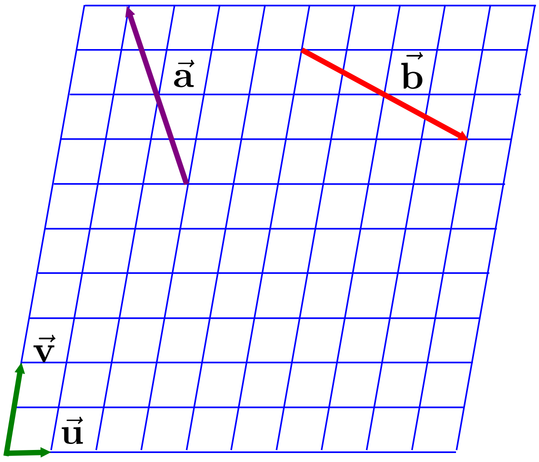
EJERCICIO 5:[3]

Calcula, pasando a forma polar:

a) $(2-2i)^4 \cdot (5i)^3$

b) $\sqrt[4]{16}$

EJERCICIO 6: [2] Responde a las siguientes cuestiones, observando los vectores de la figura:



a) Dibuja dos vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ linealmente dependientes.

b) Dibuja el vector $2\vec{u}+3\vec{v}$.

c) ¿Qué es una base en el plano?

d) Di razonadamente las coordenadas de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ en la base formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

EJERCICIO 7: Dados los vectores $\vec{u}=(2\,,1)$, $\vec{v}=(0\,,-2)$:

a) [0,75] Demuestra analíticamente que $\mathfrak{B}=\{\vec{u}\,,\,\vec{v}\}$ es una base del plano.

b) [0,75] ¿Qué coordenadas tiene en esa base el vector $\vec{x}=(6\,,-1)$?

c) [0,5] ¿Qué componentes tiene el vector $\vec{y}$ cuyas coordenadas en $\mathfrak{B}$ son $(2\,,2)$?

EJERCICIO 8: Considera los puntos $B=(-1\,,4)$, $C=(3\,,3)$, $D=(2\,,1)$.

a) [1] Obtén las coordenadas del punto A tal que $ABCD$ es un paralelogramo.

b) [1] Comprueba que las diagonales del paralelogramo anterior se cortan en su punto medio.

EJERCICIO 9: Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ verificando $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

a) [0,5] ¿Qué ángulo determinan dichos vectores?

b) [0,75] Calcula $3\vec{b}\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$.

c) [0,75] Halla el módulo o longitud del vector $\vec{a}+\vec{b}$.

EJERCICIO 10: Sean $\vec{x}=(-1\,,\alpha)$, $\vec{y}=(2\beta\,,3)$, $\vec{z}=(-6\,,8)$.

a) [0,5] Halla α sabiendo que $\vec{x}\perp\vec{z}$.

b) [0,5] Halla β sabiendo que $|\vec{y}|=\sqrt{10}$.

c) [1] Obtén un vector unitario y paralelo a $\vec{z}$.

EJERCICIO 1:

a) El ángulo a está en el segundo cuadrante, así su seno es positivo y su coseno negativo.

Obtengamos el seno y el coseno de a :

$$\cos\frac{a}{2}=t\ \rightarrow\ \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}=t\rightarrow\frac{1+\cos a}{2}=t^2\xrightarrow{despejo}\cos a=2t^2-1$$

Con la fórmula fundamental obtenemos el seno:

$$\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a=1\ \rightarrow\ \operatorname{sen}^2 a=1-\left(2t^2-1\right)^2=4t^2-4t^4=4t\left(1-t^2\right)\ \rightarrow\ \operatorname{sen} a=2t\sqrt{(1-t^2)}$$

b) Aplicamos la fórmula de adición:

$$\cos\left(270^\circ+a\right)=\cos 270^\circ\cos a-\operatorname{sen}270^\circ\operatorname{sen}a=0-(-1)\cdot\operatorname{sen}a=\operatorname{sen}a=2t\sqrt{1-t^2}$$

EJERCICIO 2:

a) Con la calculadora encontramos que es: $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}=60^\circ.$

Partiendo de este dato y teniendo en cuenta que el seno es negativo en los cuadrantes tercero y cuarto:

$$\operatorname{sen}\left(5x-60^\circ\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \rightarrow\left\{\begin{array}{lll}5x-60^\circ=240^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow & x=60^\circ+n\cdot 72^\circ\\ 5x-60^\circ=300^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow & x=72^\circ+n\cdot 72^\circ\end{array}\right.$$

b) Hay dos ángulos en la primera vuelta que tienen seno cero: 0º y 180º. Así:

$$\operatorname{sen}\left(4x+90^\circ\right)=0\ \rightarrow\left\{\begin{array}{lll}4x+90^\circ=0^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow & x=-22^\circ 30'+n\cdot 90^\circ\\ 4x+90^\circ=180^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow & x=+22^\circ 30'+n\cdot 90^\circ\end{array}\right.$$

EJERCICIO 3:

Es fácil comprobar que $x=2$ es solución ($2^3-2\cdot 2^2+16\cdot 2-32=0$). Para encontrar las otras soluciones, intentamos factorizar, realizando la división:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 16 & -32\\ 2 & \downarrow & 2 & 0 & 32\\ \hline & 1 & 0 & 16 & 0\end{array}$$

Ahora ya podemos encontrar fácilmente todas las soluciones:

$$x^3-2x^2+16x-32=0\ \rightarrow\ (x-2)\cdot\left(x^2+16\right)=0\ \rightarrow\left|\begin{array}{l}x-2=0\ \rightarrow\ x=2\\ x^2+16=0\ \rightarrow\ x^2=-16\ \rightarrow\ x=\pm 4i\end{array}\right.$$

Concluimos que la ecuación tiene una solución real y dos imaginarias (conjugadas):

$$x=2\,,x=\pm 4i$$

EJERCICIO 4:

a) $3u-4v=3\cdot(11+13i)-4\cdot(3-i)=21+43i$

b) $u\cdot\overline{v}=(11+13i)\cdot(3+i)=33+11i+39i+13i^2=20+50i$

c) Para dividir multiplicamos numerador y denominador por el conjugado:

$$\frac{u}{v}=\frac{(11+13i)\,(3+i)}{(3-i)\,(3+i)}=\frac{20+50i}{10}=2+5i$$

EJERCICIO 5:

a) Aplicamos las propiedades convenientemente:

$$(2-2i)^4\,(5i)^3 = \left(\sqrt{8}_{315^\circ}\right)^4 (3_{90^\circ})^3 = 64_{1260^\circ}\cdot 125_{270^\circ} = 8000_{1530^\circ} = 8000_{90^\circ} = 8000i$$

b) Tendrá cuatro raíces cuartas:

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16_{0^\circ}} = \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt[4]{16} = 2 \\ \beta = \dfrac{0^\circ + k\cdot 360^\circ}{3} = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ \end{array} \right\} = \{2_{0^\circ}\,,2_{90^\circ}\,,_2 180^\circ\,,2_{270^\circ}\}$$

Si queremos pasar a forma binómica:

$$\sqrt[4]{16} = \{-2\,,2\,,-2i\,,2i\}$$

EJERCICIO 6:

a) Basta dibujar dos vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ que sean paralelos. Son linealmente dependientes pues tienen igual dirección.

b) Basta usar la regla del paralelogramo (procedimiento para sumar dos vectores gráficamente): tras situar ambos sumandos en un origen común y uno a continuación de otro, el vector suma es una diagonal del paralelogramo que se forma: la que va del origen común al extremo común.

c) Una base en el plano es un par de vectores linealmente independiente; esto es, con distinta dirección.

d) Las coordenadas de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ en la base formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{a} = -2\vec{u} + 2\vec{v} \quad \xrightarrow{coordenadas} \quad (-2\,,2)$$

$$\vec{b} = 4\vec{u} - \vec{v} \quad \xrightarrow{coordenadas} \quad (4\,,-1)$$

EJERCICIO 7:

a) Basta comprobar que son dos vectores independientes:

$$\frac{0}{2} \neq \frac{-2}{1} \;\to\; \{\vec{u}\,,\vec{v}\}\ \text{ son independientes}$$

b) Pongamos $\vec{x} = s\vec{u} + t\vec{v}$:

$$(6,-1) = s\cdot(2\,,1) + t\cdot(0\,,-2) \to \left\{ \begin{array}{l} s=3 \\ t=2 \end{array} \right.$$

Luego las coordenadas pedidas son $(3\,,2)$

c) Es

$$\vec{y} = 2\vec{u} + 2\vec{v} = 2\cdot(2\,,1) + 2\cdot(0\,,-2) = (4\,,-2)$$

EJERCICIO 8:

a) $ABCD$ es un paralelogramo si $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$:

$$A - B = D - C \;\to\; A = D - C + B = (-2,2)$$

b) Calculamos los puntos medios y vemos que son idénticos:

$$M_1 = \frac{A+C}{2} = (0.5\,,2,5) \quad , \quad M_2 = \frac{B+D}{2} = (0.5\,,2,5)$$

EJERCICIO 9:

a) Si llamamos α a dicho ángulo:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \to \alpha = 135^\circ$$

b) Tenemos

$$3\vec{b} \cdot \left(2\vec{a} - \vec{b}\right) = 6\,\vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2 = 6 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -9$$

c) Es

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

Así:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2 - 2 + 1 = 1$$

Por ello:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

EJERCICIO 10:

a) Tenemos:

$$\vec{x} \perp \vec{z} \to \vec{x} \cdot \vec{z} = 0 \to 8\alpha + 6 = 0 \to \alpha = -\frac{3}{4}$$

b) Resulta:

$$|\vec{y}| = \sqrt{10} \to \sqrt{(2\beta)^2 + 3^2} = \sqrt{10} \to 4\beta^2 + 9 = 10 \to \beta = \pm\frac{1}{2}$$

c) Un vector unitario y paralelo a $\vec{z}$ es

$$\vec{u} := \frac{\vec{z}}{|\vec{z}|} = \frac{(-6\,, 8)}{10} = \left(-\frac{3}{5}\,, \frac{4}{5}\right)$$

El anterior tiene, además, el mismo sentido que $\vec{z}$. El opuesto también es unitario y paralelo, pero con sentido contrario:

$$-\vec{u} = \left(\frac{3}{5}\,, -\frac{4}{5}\right)$$