Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas I – Introducción a las derivadas – 20/06/2013

EJERCICIO 1: [3] Un objeto se lanza hacia arriba, poniéndose en ese instante en marcha un cronómetro hasta que cae al suelo. La altura (en metros) a la que se encuentra el móvil a los t segundos de ser lanzado viene dada por la fórmula:

$$h(t) = 35 + 30t - 5t^2$$

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo cae el objeto al suelo? ¿Para qué valores de t es válida la fórmula anterior?

b) Calcula la velocidad media en el intervalo de tiempo $I = [3\,,5]$.

c) Obtén $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t)$ y $\dfrac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}(t)$. ¿Qué significado tienen estas expresiones?

d) ¿Con qué velocidad fue lanzado el cuerpo? ¿A qué altura se encontraba?

e) ¿Con qué velocidad toca al suelo al caer?

f) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura máxima?

EJERCICIO 2: [3] Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ x^2+x-1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función.

b) Calcula la derivada directamente para $x \neq 2$, y determina las derivadas laterales para $x = 2$. ¿Es derivable la función para este valor?

c) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función para $x = 3$.

EJERCICIO 3: [2] Obtén la derivada de las siguientes funciones:

d) $y = x^4 \operatorname{sen} x$

e) $y = \dfrac{x^3}{4x+1}$

f) $y = 2x^3\,\mathrm{e}^x + 1$

g) $y = 5\ln x - 4x + 1$

EJERCICIO 4: [2]

Halla a y b sabiendo que la función $y = x^3 + ax + b$ pasa por el punto $(3,\ -1)$ y tiene un extremo relativo para $x = 2$.

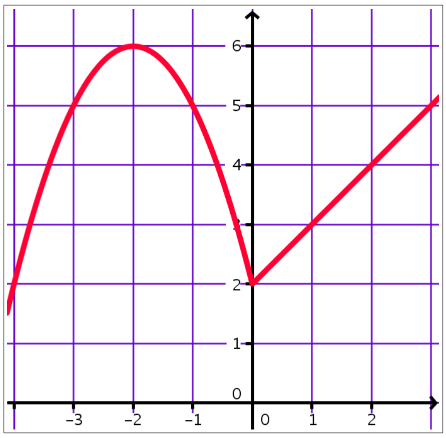
EJERCICIO 5: [2] Consideremos la función cuya gráfica $y = f(x)$ es la dibujada a la derecha.

Haz un esquema razonado en el que se recoja:

a) los puntos en los que la derivada no existe,

b) los puntos en los que la derivada es cero,

c) los intervalos de signo de la derivada.



De los ejercicios 3,4,5 señala con un aspa el que se elige para subir nota.

EJERCICIO 1:

a) Cae al suelo cuando sea $h(t) = 0$. Resolviendo:

$$h(t) = 35 + 30t - 5t^2 = 0 \ \rightarrow \ t = -1 \, , t = 7$$

Lógicamente, la solución negativa no es válida. Así que cae al suelo cuando han transcurrido 7 segundos desde el lanzamiento.

Tenemos así que la fórmula es válida en el intervalo de tiempo $[0\,,7]$.

b) La velocidad media es

$$v([3\,,5]) = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(5) - h(3)}{5 - 3} = \frac{60 - 80}{2} = -10 \ (m/s)$$

c) Esas expresiones son las derivadas primera (velocidad)y segunda (aceleración) de la altura respecto del tiempo:

$v(t) = \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t) = 30 - 10t \ (m/s)$

$a(t) = \dfrac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}(t) = -10 \ (m/s^2)$

d) Fue lanzado a $v(0) = 30 \ (m/s)$ y se encontraba a $h(0) = 35 \ (m)$

e) Cae al suelo a $v(7) = 30 - 70 = -40 \ (m/s)$.

f) Alcanza la altura máxima cuando $v(t) = 0$. Resolvamos:

$$v(t) = 0 \ \rightarrow \ 30 - 10t = 0 \ \rightarrow \ t = 3 \ (s)$$

Para hallar esa altura máxima basta sustituir:

$$h(3) = 80 \ (m)$$

EJERCICIO 2:

a) <u>Continuidad</u>: f sólo puede ser discontinua para $x = 2$ (separa-fórmulas). Veamos qué ocurre en él:
$x = 2$

VALOR: si $x = 2$ es $y = 5$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \rightarrow 2_- & \text{es} \quad y = x^2 + 1 \rightarrow 5 \\ \text{si } x \rightarrow 2_+ & \text{es} \quad y = x^2 + x - 1 \rightarrow 5 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 2$.

b) Podemos derivar directamente si $x \neq 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para $x = 2$, como es continua, podemos hallar las derivadas laterales así:

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si } x \rightarrow 2_- & \text{es} \quad y' = 2x \rightarrow 4 \\ \text{si } x \rightarrow 2_+ & \text{es} \quad y' = 2x + 1 \rightarrow 5 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que no es derivable para este valor (se trata de un punto anguloso)

c) La ecuación de la recta tangente para $x = 3$ es

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$$

Sustituyendo, obtenemos $f(3) = 11$ y $f'(3) = 7$. Así que la fórmula nos queda:

$$y - 11 = 7(x - 3) \;\rightarrow\; y = 7x - 10$$

EJERCICIO 3:

a) Derivada de un producto:

$$y = x^4 \operatorname{sen} x \;\rightarrow\; y' = 4x^3 \operatorname{sen} x + x^4 \cos x$$

b) Derivada de un cociente:

$$y = \frac{x^3}{4x+1} \;\rightarrow\; y' = \frac{3x^2(4x+1) - 4x^3}{(4x+1)^2} = \frac{8x^3 + 3x^2}{(4x+1)^2}$$

c) Derivada de una suma y producto:

$$y = 2x^3 \mathrm{e}^x + 1 \;\rightarrow\; y' = 6x^2 \mathrm{e}^x + 2x^3 \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(6x^2 + 2x^3)$$

d) Derivada de una suma/resta:

$$y = 5 \ln x - 4x + 1 \;\rightarrow\; y' = \frac{5}{x} - 4 = \frac{5 - 4x}{x}$$

EJERCICIO 4:

$$y = x^3 + ax + b \;\rightarrow\; y' = 3x^2 + a$$

si pasa por el punto $(3,\, -1)$, entonces para $x = 3$ es $y = -1$:

$$27 + 3a + b = -1 \text{ (*)}$$

si tiene un extremo relativo para $x = 2$, entonces para $x = 2$ es $y' = 0$:

$$3 \cdot 4 + a = 0 \text{ (**)}$$

De (*) y (**) obtenemos $a = -12$, $b = 8$.

EJERCICIO 5:

Tenemos en cuenta:

- que si la función crece la derivada es positiva y que si decrece la derivada es negativa

- que la derivada (si existe) es cero en los extremos relativos

- que la derivada no existe en el punto anguloso:

Así el esquema de la derivada es: