

Nombre: _____

Curso: _____

Matemáticas I – Introducción a las derivadas – 21/06/2013



EJERCICIO 1: [3] Un objeto se lanza hacia arriba, poniéndose en ese instante en marcha un cronómetro hasta que cae al suelo. La altura (en metros) a la que se encuentra el móvil a los t segundos de ser lanzado viene dada por la fórmula:

$$h(t) = 100 + 40t - 5t^2$$

- ¿Al cabo de cuánto tiempo cae el objeto al suelo? ¿Para qué valores de t es válida la fórmula anterior?
- Calcula la velocidad media en el intervalo de tiempo $I = [3, 5]$.
- Obtén $\frac{dh}{dt}(t)$ y $\frac{d^2h}{dt^2}(t)$. ¿Qué significado tienen estas expresiones?
- ¿Con qué velocidad fue lanzado el cuerpo? ¿A qué altura se encontraba?
- ¿Con qué velocidad toca al suelo al caer?
- ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura máxima?

EJERCICIO 2: [3] Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ x^2 - x + 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- Estudia la continuidad de la función.
- Calcula la derivada directamente para $x \neq 3$, y determina las derivadas laterales para $x = 3$. ¿Es derivable la función para este valor?
- Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función para $x = 2$.

EJERCICIO 3: [2] Obtén la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^5 \cos x$

b) $y = \frac{x^2 - 1}{4x + 1}$

c) $y = 2x^5 e^x - 1$

d) $y = 3x + 2 \ln x - 1$

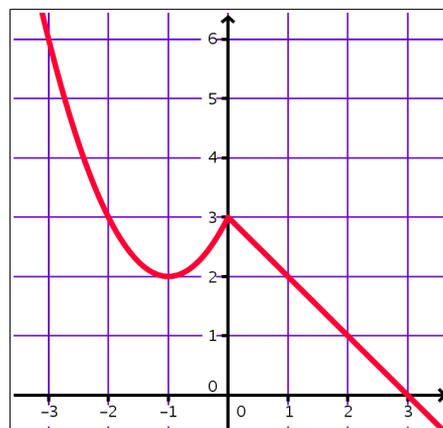
EJERCICIO 4: [2]

Halla a y b sabiendo que la función $y = x^3 + ax^2 + b$ pasa por el punto $(2, 1)$ y tiene un extremo relativo para $x = -2$.

EJERCICIO 5: [2] Consideremos la función cuya gráfica $y = f(x)$ es la dibujada a la derecha.

Haz un esquema razonado en el que se recoja:

- los puntos en los que la derivada no existe,
- los puntos en los que la derivada es cero,
- los intervalos de signo de la derivada.



De los ejercicios 3,4,5 señala con un aspa el que se elige para subir nota.

EJERCICIO 1:

a) Cae al suelo cuando sea $h(t) = 0$. Resolviendo:

$$100 + 40t - 5t^2 = 0 \rightarrow t = -2, t = 10$$

Lógicamente, la solución negativa no es válida. Así que cae al suelo cuando han transcurrido 10 segundos desde el lanzamiento.

Tenemos así que la fórmula es válida en el intervalo de tiempo $[0, 10]$.

b) La velocidad media es

$$v([3, 5]) = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(5) - h(3)}{5 - 3} = \frac{175 - 175}{2} = 0 \text{ (m/s)}$$

c) Esas expresiones son las derivadas primera (velocidad) y segunda (aceleración) de la altura respecto del tiempo:

$$v(t) = \frac{dh}{dt}(t) = 40 - 10t \text{ (m/s)}$$

$$a(t) = \frac{d^2h}{dt^2}(t) = -10 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

d) Fue lanzado a $v(0) = 40 \text{ (m/s)}$ y se encontraba a $h(0) = 100 \text{ (m)}$

e) Cae al suelo a $v(10) = 40 - 100 = -60 \text{ (m/s)}$.

f) Alcanza la altura máxima cuando $v(t) = 0$. Resolvamos:

$$v(t) = 0 \rightarrow 40 - 10t = 0 \rightarrow t = 4 \text{ (s)}$$

Para hallar esa altura máxima basta sustituir:

$$h(4) = 180 \text{ (m)}$$

EJERCICIO 2:

a) Continuidad: f sólo puede ser discontinua para $x = 3$ (separa-fórmulas). Veamos qué ocurre en él:

$$x = 3$$

VALOR: si $x = 3$ es $y = 8$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \rightarrow 3_- \text{ es } y = x^2 - 1 \rightarrow 8 \\ \text{si } x \rightarrow 3_+ \text{ es } y = x^2 - x + 2 \rightarrow 8 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 3$.

b) Podemos derivar directamente si $x \neq 3$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 3 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Para $x = 3$, como es continua, podemos hallar las derivadas laterales así:

DERIVADAS LATERALES $\begin{cases} \text{si } x \rightarrow 3_- \text{ es } y' = 2x \rightarrow 6 \\ \text{si } x \rightarrow 3_+ \text{ es } y' = 2x - 1 \rightarrow 5 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que no es derivable para este valor (se trata de un punto anguloso)

c) La ecuación de la recta tangente para $x = 2$ es

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

Sustituyendo, obtenemos $f(2) = 3$ y $f'(2) = 4$. Así que la fórmula nos queda:

$$y - 3 = 4(x - 2) \rightarrow y = 4x - 5$$

EJERCICIO 3:

a) Derivada de un producto:

$$y = x^5 \cos x \rightarrow y' = 5x^4 \cos x - x^5 \sin x$$

b) Derivada de un cociente:

$$y = \frac{x^2 - 1}{4x + 1} \rightarrow y' = \frac{2x(4x + 1) - 4(x^2 - 1)}{(4x + 1)^2} = \frac{4x^2 + 2x + 4}{(4x + 1)^2}$$

c) Derivada de una resta y producto:

$$y = 2x^5 e^x - 1 \rightarrow y' = 10x^4 e^x + 2x^5 e^x = e^x(10x^4 + 2x^5)$$

d) Derivada de una suma/resta:

$$y = 3x + 2 \ln x - 1 \rightarrow y' = 3 + \frac{2}{x} = \frac{3x + 2}{x}$$

EJERCICIO 4:

$$y = x^3 + ax^2 + b \rightarrow y' = 3x^2 + 2ax$$

si pasa por el punto $(2, 1)$, entonces para $x = 2$ es $y = 1$:

$$8 + 4a + b = 1 (*)$$

si tiene un extremo relativo para $x = -2$, entonces para $x = -2$ es $y' = 0$:

$$3 \cdot 4 - 4a = 0 (**)$$

De (*) y (**) obtenemos $a = 3$, $b = -19$.

EJERCICIO 5:

Tenemos en cuenta:

- que si la función crece la derivada es positiva y que si decrece la derivada es negativa
- que la derivada (si existe) es cero en los extremos relativos
- que la derivada no existe en el punto anguloso:

Así el esquema de la derivada es:

