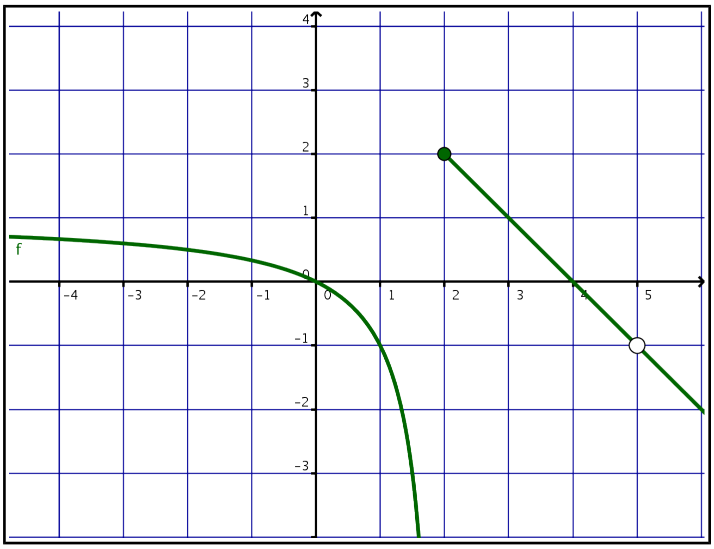
Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas I – Límites y Continuidad de Funciones – 05/05/2013	

EJERCICIO 1: Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde:



a) [1,5] Estudia la continuidad de la función, señalando valor y tendencias en las discontinuidades.

b) [0,5] Indica las tendencias de $f(x)$ la función para $x \to \pm\infty$.

c) [0,5] ¿Qué asíntotas tiene la gráfica?

EJERCICIO 2: Dada la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2^{x+1} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) [1] Estudia algebraicamente su continuidad.

b) [1] Obtén los límites en el infinito de la función.

c) [0,5] Determina las asíntotas de la gráfica de f

EJERCICIO 3: Sea

$$f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2 - x - 6}$$

a) [0,5] Calcula los límites de $f(x)$ para $x \to \pm\infty$.

b) [2] Estudia la continuidad de la función.

c) [0,5] ¿Cuáles son las asíntotas de su gráfica?

EJERCICIO 4:

a) [1] Si f es una función que verifica $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ y $f(1) = k$, estudia su continuidad para $x = 1$.

b) [1] Dibuja la gráfica de una función que tenga a la recta $y = 2$ como asíntota horizontal y que verifique $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = -2$ y $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = +\infty$.

EJERCICIO 1:

a) Vemos que es continua en todo punto salvo para $x = 2$ (discontinuidad de salto infinito) y para $x = 5$ (discontinuidad evitable o de agujero).

Veamos en $x = 2$:

Valor: si $x = 2$ es $y = 2$

Tendencias: $\begin{cases} \text{si } x \to 2- \text{ es } y \to -\infty \\ \text{si } x \to 2+ \text{ es } y \to 2 \end{cases}$

Veamos en $x = 5$:

Valor: si $x = 5$ es $y = \emptyset$

Tendencias: $\begin{cases} \text{si } x \to 5- \text{ es } y \to -1 \\ \text{si } x \to 5+ \text{ es } y \to -1 \end{cases}$

b) Las tendencias en el infinito son:

si $x \to -\infty$ es $y \to 1$

si $x \to +\infty$ es $y \to -\infty$

c) Vemos las asíntotas:

Asíntota vertical (por el apartado a): $x = 2$

Asíntota horizontal (por el apartado b): $y = 1$ ($x \to -\infty$)

EJERCICIO 2:

a) La función sólo puede ser discontinua en $x = 0$, por ser el separa-fórmulas de trozos continuos.

Veamos en $x = 0$:

Valor: si $x = 0$ es $y = 0$

Tendencias: $\begin{cases} \text{si } x \to 0- \text{ es } y = 2 - 2^{x+1} \to 0 \\ \text{si } x \to 0+ \text{ es } y = x^2 - 2x - 3 \to -3 \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito ($s = -3$) para $x = 0$.

b) Las tendencias en el infinito son:

si $x \to -\infty$ es $y = 2 - 2^{x+1} \to 2 - 2^{-\infty} = 2 - 0 = 2$

si $x \to +\infty$ es $y = x^2 - 2x - 3 \to (+\infty)^2 = +\infty$

c) Veamos las asíntotas:

Asíntotas verticales (por el apartado a): no hay.

Asíntota horizontal (por el apartado b): $y = 1$

EJERCICIO 3:

a) Aplicamos la regla de los grados. Como el grado del numerador y del denominador es el mismo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - x - 6} = \frac{2}{1} = 2$$

b) La función sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador, que son:

$$x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = -2\,, x = 3$$

Veamos en $x = -2$:

Valor: $f(-2) = \left[\frac{-10}{0}\right] = \emptyset$

Tendencias: $\lim_{x\to -2} f(x) = \left[\frac{-10}{0}\right] = \pm\infty$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = -2$.

Veamos en $x = 3$:

Valor: $f(3) = \left[\frac{0}{0}\right] = \emptyset$

Tendencias $\lim_{x\to 3} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{*}{=} \lim_{x\to 3} \frac{2(x+3)}{(x+2)} = \frac{12}{5}$

Simplificamos para evitar la indeterminación:

$$\frac{2x^2 - 18}{x^2 - x - 6} = \frac{2(x+3)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = \frac{2(x+3)}{(x+2)} (*)$$

Concluimos que hay una discontinuidad evitable o de agujero para $x = 3$.

c) Veamos las asíntotas:

Asíntota vertical (por el apartado b): $x = -2$

Asíntota horizontal (por el apartado a): $y = 2$

EJERCICIO 4:

a) Observemos que depende de cuánto valga k:

Si $k = 2$ entonces valor y tendencia coinciden: f es continua para $x = 1$.

Si $k \neq 2$ entonces existe la tendencia y es distinta del valor: hay una discontinuidad evitable para $x = 1$.

b) Esta es una de las infinitas posibilidades: