Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas I – Funciones – 03/05/2013	

EJERCICIO 1: [3]

En un experimento que dura cuatro horas se estudia la temperatura de un objeto. Ésta varía en función del tiempo transcurrido desde el inicio de la experiencia según la fórmula

$$T = 5t - t^2 \quad , \quad 0 \le t \le 4$$

donde el tiempo (t) está medido en horas y la temperatura (T) en grados centígrados.

a) ¿Cuál es la temperatura al inicio del experimento? ¿Y al final?

b) Dibuja la gráfica tiempo – Temperatura.

c) ¿En qué período de tiempo aumenta la temperatura del objeto? ¿En cuál disminuye?

d) Señala las temperatura máxima y mínima alcanzadas.

e) Indica cuándo la temperatura está bajo cero y cuándo por encima.

f) Construye un esquema de variación de la función.

EJERCICIO 2: [2,5]

Considera la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x + 1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

a) Dibuja su gráfica.

b) Señala: dominio, recorrido, continuidad, monotonía, extremos y tendencia de prolongación.

EJERCICIO 3: [3,5]

Considera las funciones siguientes:

$$f(x) = x - 4 \quad , \quad g(x) = \sqrt{3x+3} \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{5x-4}{x+2}$$

a) Calcula $(f - h)(0)$ y $(f \circ g)(-1)$

b) Halla $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ y su dominio.

c) Obtén $(g \circ f)(x)$ y su dominio.

d) Obtén la recíproca de h.

EJERCICIO 4: [1]

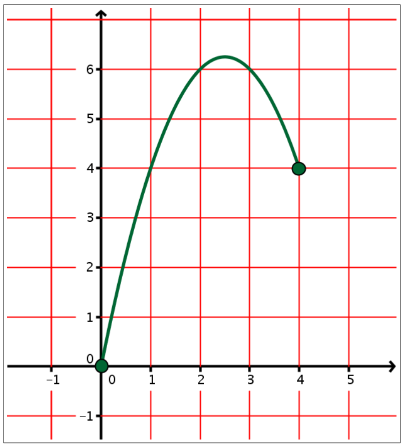
Construimos un rectángulo cuya superficie es de 12 cm^2. Expresa su perímetro y su diagonal en función de la longitud de la base.

EJERCICIO 1: $T = 5t - t^2 \quad , \quad 0 \leq t \leq 4$

a) Hacemos $t = 0 \;\rightarrow\; T = 0$: al inicio del experimento la temperatura es de cero grados.

Haciendo $t = 4 \;\rightarrow\; T = 4$: al final de la experiencia la temperatura es de cuatro grados.

b) La gráfica será un trozo de parábola con vértice para $t = 2.5$. Con una tabla de valores conseguimos:



c) En la gráfica apreciamos que la temperatura aumenta desde el inicio hasta las 2,5 horas y disminuye desde ese momento hasta el final.

d) La temperatura máxima es 6,25 ºC y se alcanza a las 2,5 horas (vértice de la gráfica)

La temperatura mínima es de 0ºC y se alcanza al principio del experimento (origen de coordenadas).

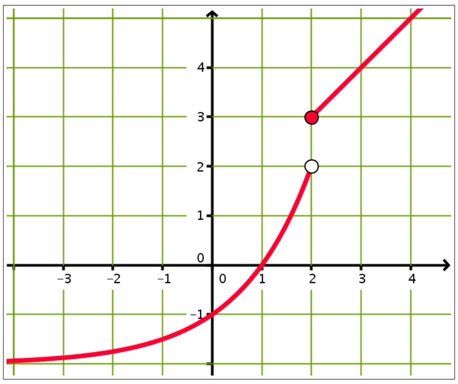
e) Observamos que la gráfica salvo al principio, siempre está por encima del eje de abscisas, luego la temperatura siempre es positiva salvo al principio (que sabemos que está a cero grados)

f) La siguiente tabla resume la variación de la función:

t	0		2,5		4
T	0	↗	6,25	↘	4

EJERCICIO 2:

a) La gráfica se compone de un trozo de curva exponencial y de un trozo de recta:



b) El dominio es el conjunto de los valores x para los que hay gráfica: para todos los valores:

$$D_f = \mathbb{R}$$

El conjunto de imágenes es el formado por todos los valores y que toma la función:

$$R_f = (-2\,,2) \cup [3\,,+\infty)$$

La gráfica es continua en todo punto excepto para $x = 2$, donde presenta una discontinuidad de salto finito (salto de una unidad).

Observamos en la gráfica que la función siempre es creciente.

En cuanto a los valores extremos, observamos que no hay valor máximo porque la función no está acotada superiormente.

No tiene tampoco valor mínimo, aunque su extremo inferior es $y = -2$

Observemos que y se aproxima cada vez más a -2 conforme x va tomando valores cada vez más pequeños ($y = -2$ es asíntota horizontal). Así.

$$\text{si } x \to -\infty \text{ es } y \to -2$$

Observemos que y toma valores cada vez más grandes cuando x va tomando cada vez más grande (recta creciente. Así

$$\text{si } x \to +\infty \text{ es } y \to +\infty$$

EJERCICIO 3:

$$f(x) = x-4 \quad , \quad g(x) = \sqrt{3x+3} \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{5x-4}{x+2}$$

a) $(f - h)(0) = -4 - (-2) = -4 + 2 = -2$

$(f \circ g)(-1) = f(0) = -4$

El esquema de esta composición es:

$$\begin{tikzcd} x = -1 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & 0 \arrow[r, "f"] & y = -4 \end{tikzcd}$$

b) En cuanto al cociente:

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{5x-4}{x+2} : \frac{x-4}{1} = \frac{5x-4}{(x+2)(x-4)}$$

El denominador no puede ser cero:

$$(x+2)(x-4) = 0 \ \to \ x = -2, x = 4$$

Así:

$$D = \mathbb{R} - \{-2\,,4\}$$

c) La fórmula que define a la función compuesta es:

$$(g \circ f)(x) = g(x-4) = \sqrt{3(x-4)+3} = \sqrt{3x-9}$$

Para que dicha expresión exista, debe ser:

$$3x - 9 \geq 0$$

Resolviendo la inecuación:

$$D = [3\,,+\infty)$$

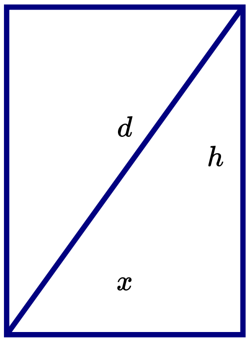
d) Veamos la función inversa:

$$\frac{5x-4}{x-2} = y \;\rightarrow\; 5x-4 = yx+2y \;\rightarrow\; 5x-yx = 2y+4 \;\rightarrow\; x(5-y) = 2y+4 \;\rightarrow\; x = \frac{2y+4}{5-y}$$

Tenemos así

$$f^{-1}(y) = \frac{2y+4}{5-y}$$

EJERCICIO 4:



Llamamos:

x la longitud de la base

h la longitud de la altura

d a la longitud de la diagonal

p al perímetro

S a la superficie o área.

Tenemos:

$$S = 12 \;\rightarrow\; x\cdot h = 12 \;\rightarrow\; h = \frac{12}{x}$$

Así el perímetro del rectángulo es:

$$p = 2x + 2h = 2x + \frac{24}{x}$$

La diagonal del rectángulo es:

$$d = \sqrt{x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^4+144}}{x}$$