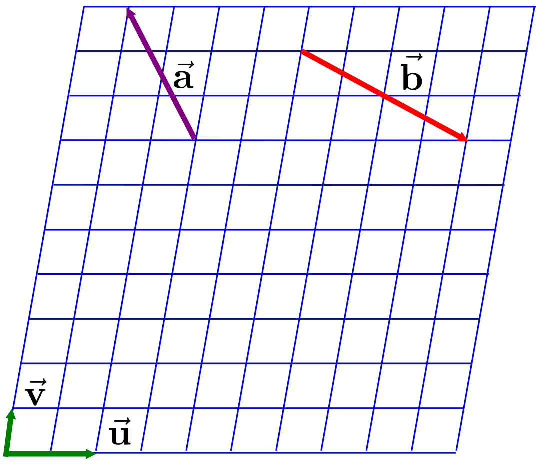
EJERCICIO 1: [2] Responde a las siguientes cuestiones, observando los vectores de la figura:



a) ¿Qué significado tiene la palabra “equipolente”?

b) Dibuja dos vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ linealmente dependientes.

c) ¿Qué es la regla del paralelogramo?

d) Dibuja el vector $2\vec{u}+3\vec{v}$.

e) Di razonadamente las coordenadas de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ en la base formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

EJERCICIO 2: Dados los vectores $\vec{u}=(2\,,-1)$, $\vec{v}=(0\,,2)$:

a) [0,75] Demuestra analíticamente que $\mathfrak{B}=\{\vec{u}\,,\,\vec{v}\}$ es una base del plano.

b) [0,75] ¿Qué coordenadas tiene en esa base el vector $\vec{x}=(6\,,-7)$?

c) [0,5] ¿Qué componentes tiene el vector $\vec{y}$ cuyas coordenadas en $\mathfrak{B}$ son $(2\,,2)$?

EJERCICIO 3: Considera los puntos $A=(1\,,1)$, $B=(2\,,3)$, $C=(3\,,0)$.

a) [1] Obtén las coordenadas del punto M que divide en dos partes iguales a $\overline{AB}$.

b) [1] Obtén las coordenadas del punto D tal que $ABCD$ es un paralelogramo.

EJERCICIO 4: Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ verificando $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{3}$

a) [0,5] ¿Qué ángulo determinan dichos vectores?

b) [0,75] Calcula $2\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)$.

c) [0,75] Halla el módulo o longitud del vector $\vec{a}-\vec{b}$.

EJERCICIO 5: Sean $\vec{x}=(\alpha\,,4)$, $\vec{y}=(1\,,-\beta)$, $\vec{z}=(8\,,6)$.

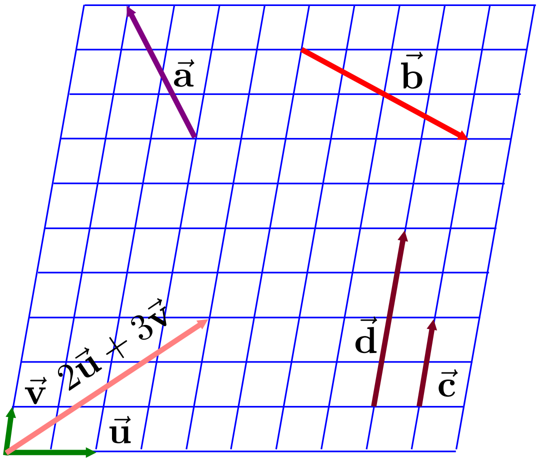
a) [0,5] Halla α sabiendo que $\vec{x}\perp\vec{z}$.

b) [0,5] Halla β sabiendo que $|\vec{y}|=3$.

c) [1] Obtén un vector unitario ortogonal a $\vec{z}$.

EJERCICIO 1:

a) Equipolente es la propiedad que tienen las representaciones gráficas de un vector: todas tienen igual dirección, sentido y módulo.



b) Son $\vec{c}$ y $\vec{d}$ linealmente dependientes pues tienen igual dirección. Observemos que:

$$\vec{d} = 2\vec{c}$$

c) La regla del paralelogramo es un procedimiento para sumar dos vectores gráficamente: tras situar ambos sumandos en un origen común y uno a continuación de otro, el vector suma es una diagonal del paralelogramo que se forma: la que va del origen común al extremo común (como en el apartado d).

d) Véase en la malla.

e) Las coordenadas de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ en la base formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{a} = -\vec{u} + 3\vec{v} \quad \xrightarrow{coordenadas} \quad (-1\,,3)$$

$$\vec{y} = 2\vec{u} - 2\vec{v} \quad \xrightarrow{coordenadas} \quad (2\,,-2)$$

EJERCICIO 2:

a) Basta comprobar que son dos vectores independientes:

$$\frac{0}{2} \neq \frac{2}{-1} \rightarrow \{\vec{u}\,,\vec{v}\} \text{ son independientes}$$

b) Pongamos $\vec{x} = s\vec{u} + t\vec{v}$:

$$(6,-7) = s \cdot (2\,,-1) + t \cdot (0\,,2) \rightarrow \begin{cases} s = 3 \\ t = -2 \end{cases}$$

Luego las coordenadas pedidas son $(3\,,-2)$

c) Es

$$\vec{y} = 2\vec{u} + 2\vec{v} = 2 \cdot (2\,,-1) + 2 \cdot (0\,,2) = (4\,,2)$$

EJERCICIO 3:

a) Se trata del punto medio M del segmento. Así:

$$M = \frac{A+B}{2} = (1.5\,,2)$$

b) $ABCD$ es un paralelogramo si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$:

$$D - A = A - B \;\rightarrow\; D - (3,0) = (1,1) - (2,3) \;\rightarrow\; D = (2,-2)$$

EJERCICIO 4:

a) Si llamamos α a dicho ángulo:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-\sqrt{3}}{2\cdot 1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \to \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

b) Tenemos

$$2\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-3\vec{b}\right) = 2\vec{a}^2 - 6\,\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 4 - 6\cdot\left(\sqrt{3}\right) = 8-6\sqrt{3}.$$

c) Es

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

Así:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 5+2\sqrt{3}$$

Por ello:

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{5+2\sqrt{3}}$$

EJERCICIO 5:

a) Tenemos:

$$\vec{x}\perp\vec{z} \to \vec{x}\cdot\vec{z} = 0 \to 8\alpha+24=0 \to \alpha=-3$$

b) Resulta:

$$|\vec{y}| = 3 \to 1+\beta^2 = 9 \to \beta = \pm\sqrt{8}$$

c) Un vector ortogonales y con igual módulo a $\vec{z}$ es

$$\vec{n} = (-6\,,8)$$

Como

$$|\vec{n}| = \sqrt{36+64} = 10$$

los dos vectores unitarios y ortogonales a $\vec{z}$ son

$$\frac{1}{10}\vec{n} = \left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) \text{ y } -\frac{1}{10}\vec{n} = \left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$$