Nombre:____ *Curso*:_____	
Matemáticas I – Trigonometría y Números Complejos	

EJERCICIO 1:

Sea a un ángulo con $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ tal que

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Calcula usando las fórmulas adecuadas:

a) $\operatorname{sen} a$ y $\cos a$

b) $\cos 2a$

c) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)$

EJERCICIO 2:

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

b) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

EJERCICIO 3:

Resuelve la siguiente ecuación en el campo complejo:

$$x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$$

EJERCICIO 4:

Consideremos los números complejos

$$u = -5 + i\ ,\ v = -2 + 3i$$

Calcula:

a) $2u - 5v$

b) $-\, u \cdot \overline{v}$

c) $\frac{u}{v}$

EJERCICIO 5:

Calcula, pasando a forma polar:

a) $(1+i)^6 \cdot (5i)$

b) $\sqrt[3]{-8}$

EJERCICIO 1:

a) El ángulo a está en el segundo cuadrante, así su seno es positivo y su coseno negativo.

Obtengamos el seno y el coseno de a :

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ \rightarrow\ \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\rightarrow\frac{1+\cos a}{2}=\frac{1}{5}\xrightarrow{despejo}\cos a=-\frac{3}{5}$$

Con la fórmula fundamental obtenemos el seno:

$$\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a=1\ \rightarrow\ \operatorname{sen} a=1-\frac{9}{25}=\frac{15}{25}\ \rightarrow\ \operatorname{sen} a=\frac{4}{5}$$

b) Ahora calculamos, por la fórmula del ángulo doble:

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a=\frac{9}{25}-\frac{16}{25}=-\frac{7}{25}$$

c) Aplicamos la fórmula de adición:

$$\cos\left(270^\circ+a\right)=\cos 270^\circ\cos a-\operatorname{sen}270^\circ\operatorname{sen} a=0\cdot\frac{3}{5}-(-1)\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$$

EJERCICIO 2:

a) Con la calculadora encontramos que es: $\frac{1}{2}=30^\circ$.

Partiendo de este dato y teniendo en cuenta que el seno es negativo en los cuadrantes tercero y cuarto:

$$(4x-90^\circ)=-\frac{1}{2}\ \rightarrow\ \begin{cases}4x-90^\circ=210^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow\quad x=75^\circ+n\cdot 90^\circ\\ 4x-90^\circ=330^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow\quad x=105^\circ+n\cdot 90^\circ\end{cases}$$

b) Hay dos ángulos en la primera vuelta que tienen coseno cero: 90º y 270º. Así:

$$\operatorname{sen}\left(3x-60^\circ\right)=0\ \rightarrow\ \begin{cases}3x-60=90^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow\quad x=50^\circ+n\cdot 120^\circ\\ 3x-60=270^\circ+n\cdot 360^\circ & \rightarrow\quad x=110^\circ+n\cdot 120^\circ\end{cases}$$

EJERCICIO 3:

Es fácil comprobar que $x=1$ es solución:

$$1^3-1^2+4\cdot 1-4=0$$

Para encontrar las otras soluciones, intentamos factorizar, realizando la división:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 4 & -4\\ 1 & \downarrow & 1 & 0 & 4\\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0\end{array}$$

Ahora ya podemos encontrar fácilmente todas las soluciones:

$$x^3-x^2+4x-4=0\ \rightarrow\ (x-1)\cdot\left(x^2+4\right)=0\ \rightarrow\ \left|\begin{array}{l}x-1=0\ \rightarrow\ x=1\\ x^2+4=0\ \rightarrow\ x^2=-4\ \rightarrow\ x=\pm 2i\end{array}\right.$$

Concluimos que la ecuación tiene una solución real y dos imaginarias (conjugadas):

$$x=1\,,x=\pm 2i$$

EJERCICIO 4:

a) $2u - 5v = 2 \cdot (-5 + i) - 5 \cdot (-2 + 3i) = -13i$

b) $-\,u \cdot \overline{v} = (5 - i) \cdot (-2 - 3i) = -10 - 15i + 2i + 3i^2 = -13 - 13i$

c) Para dividir multiplicamos numerador y denominador por el conjugado:

$$\frac{u}{v} = \frac{(-5 + i)(-2 - 3i)}{(-2 + 3i)(-2 - 3i)} = \frac{13 + 13i}{13} = 1 + i$$

EJERCICIO 5:

a) $(1 + i)^6\,(5i) = \left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^6 (5i) = 2^3_{270^\circ} \cdot 5_{90^\circ} = 40_{360^\circ} = 40$

b) Tendrá tres raíces cúbicas:

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \beta = \dfrac{180^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ \end{array} \right\} = 2_{60^\circ}\,, 2_{180^\circ}\,, 2_{300^\circ}$$

Si queremos pasar a forma binómica:

$$\sqrt[3]{-8} = 1 + i\sqrt{3}\ ,\ -2\ ,\ 1 - i\sqrt{3}$$