10 Introducción a las Derivadas

Recta Tangente

Idea intuitiva: la recta que sólo **roza** a una curva en P y a ningún otro en su cercanía se llama **tangente** en P,

En un recorrido, la tangente es la recta de **escape** ante la salida de un móvil. Requisitos de existencia:

1º. **Continuidad**.

2º. **Suavidad**: pendientes laterales coincidentes.

Cuando en una gráfica hay continuidad pero no suavidad en P se dice que éste es un **punto anguloso**.

La **pendiente** de la tangente está relacionada con ciertas características de las curvas suaves:

- Si la curva crece la pendiente es positiva.
- Si la curva decrece la pendiente es negativa.
- En los extremos la pendiente es cero.

Derivada

Decimos que f es **derivable** para $x = a$ si $y = f(x)$ tiene tangente para $x = a$, llamándose entonces a su pendiente **derivada** de f en $x = a$. Y se escribe:

$$f'(a) = m$$

A la función $x \mapsto f'(x)$ se le llama función derivada.

Ideas importantes:	derivable = suaaaave.
	derivada = pendiente.

Definición Derivada

La **función derivada** de f es la definida como sigue en cada cada valor $x \in \mathbb{D}$ en el que exista el límite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Derivadas Básicas

Derivada de constante:	$D(k) = 0$
Derivada de identidad:	$D(x) = 1$
Derivada de potencia:	$D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$

Derivadas y Operaciones

Suma o resta:	$D(u \pm v) = u' \pm v'$
Constante por fórmula:	$D(ku) = ku'$
Producto:	$D(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v'$
Cociente:	$D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Otras Derivadas

Derivada de función potencial y de raíz cuadrada:

$Dx^n = n \cdot x^{n-1}$	$Du^n = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Función exponencial y logarítmica:

$D\,e^x = e^x$	$D\,e^u = e^u \cdot u'$
$D \ln x = \frac{1}{x}$	$D \ln u = \frac{u'}{u}$

Derivada de funciones trigonométricas

$D \operatorname{sen} x = \cos x$	$D \operatorname{sen} u = u' \cos u$
$D \cos x = -\operatorname{sen} x$	$D \cos u = -u' \operatorname{sen} u$

Regla de la Cadena

Es la regla que permite derivar una composición:

$$y = f[u(x)] \xrightarrow{D} y' = f'[u(x)] \cdot u'(x)$$

Ecuación Recta Tangente

La **tangente** a la gráfica $y = f(x)$ para $x = a$ es

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

La pendiente es la derivada en ese punto:

$$m = f'(a)$$

Continuidad y Derivabilidad

Al estudiar la **derivabilidad** de f en un valor concreto $x = x_0$ primero estudiamos la continuidad en $x = x_0$.

Nos podemos encontrar tres casos:

1. f es **discontinua** en $x = x_0$.

   Tenemos que f **no es derivable** en $x = x_0$.

2. f es **continua** en $x = x_0$.

   Hallamos las **derivadas laterales**:

   $$f'(x_0-) \text{ y } f'(x_0+)$$

   Ahora hay dos posibilidades:

   - 2A: Las derivadas laterales **no coinciden**.

     Resulta que f **no es derivable** en $x = x_0$

     ¡Punto anguloso!

   - 2B: Las derivadas laterales **coinciden** (L)

     Resulta que f es **derivable** en $x = x_0$:

     $$f'(x_0) = L$$