# 9 Límites y Continuidad

## Continuidad

De modo intuitivo, una función es continua cuando su gráfica se puede construir “con un solo trazo”, esto es, no tiene ni agujeros, ni roturas ni saltos.

Sea $f$ una **función** definida en el intervalo $I$ y $x_0 \in I$. Decimos que $f$ es **continua** en $x = x_0$ cuando el valor y la tendencia existen y coinciden; esto es:

1. Existe el valor: $f(x_0)$
2. Existe el límite: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
3. Valor y límite coinciden: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Si alguna de esas tres cosas no ocurren, se dice que en $x = x_0$ hay una **discontinuidad**:

- **evitable** o de agujero. si el límite existe y es finito, pero no coincide con el valor (porque no existe o porque es un número diferente)
- de **salto infinito** si los laterales existen, pero alguno de ellos es infinito.
- de **salto finito** si ambos laterales son finitos pero distintos.
- Por último, hay funciones como $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ que para $x = 0$ no tiene siquiera límites laterales . Ésta se denomina discontinuidad **esencial**.

## Funciones Elementales

En general, las funciones elementales son continuas en todo punto salvo quizá en algunos valores concretos.

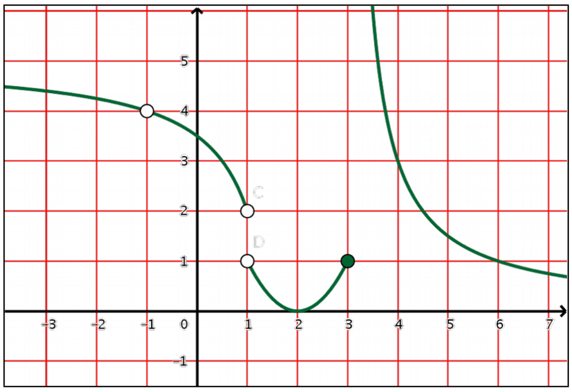
Las funciones polinómicas, seno, coseno y exponencial son continuas en todo punto.

Las funciones racionales, radicales, y logarítmicas son continuas en todos los valores en los que están definidas.

PELIGRO:

- Las funciones fraccionarias son discontinuas en los ceros del denominador (si los hubiese).
- Los logaritmos tienen salto infinito en los ceros del argumento.
- Las funciones a trozos pueden fallar en los separa-fórmulas.

## Análisis Gráfico de la Continuidad




Sólo es discontinua para $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Para $x = -1$ hay discontinuidad evitable:

Valor: $f(-1) = \emptyset$

Tendencias: $f(-1-) = 4$

$f(-1+) = 4$

Para $x = 1$ hay discontinuidad de salto finito:

Valor: $f(1) = \emptyset$

Tendencias: $f(1-) = 2$

$f(1+) = 1$

Para $x = 3$ hay discontinuidad de salto infinito:

Valor: $f(3) = 1$

Tendencias: $f(3-) = 1$

$f(3+) = +\infty$

## Límites de Polinomios en un Punto

Sustituimos (pues es continua) para calcular un límite:

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - x - 1) = 2^3 - 2 - 1 = 5$$

## Límites de Funciones a Trozos en un Punto

Veamos los límites para $x \to -2$, $x \to 0$ y $x \to 2$ de

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x^2 + 9 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} (2x + 1) = -3$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) \begin{cases} f(0-) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f(0+) = -0^2 - 9 = -9 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (-x^2 + 9) = 5$$

# 9 LÍMITES Y CONTINUIDAD

## LÍMITE DE RACIONALES EN UN PUNTO

Sustituimos y hay tres posibilidades:

- Si el valor existe, el límite es ese número (continua):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x}{2x-4}=\frac{-1}{-2}=0.5$$

- Si obtenemos un número no nulo entre cero, el límite es infinito (salto infinito):

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x^2-9}=\left[\frac{4}{0}\right]=\begin{cases} f\left(3-\right)=-\infty \\ f\left(3+\right)=+\infty \end{cases}$$

- Si obtenemos cero entre cero es indeterminado, debiendo factorizar y simplificar para volver a sustituir (agujero o salto infinito):

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{x\cancel{(x-4)}}=\frac{8}{4}=2$$

## LÍMITE DE POLINOMIOS EN EL INFINITO

Siempre es infinito (sustituimos el líder):

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-2x^3+5x^2\right)=-2\left(-\infty\right)^3=-2\left(-\infty\right)=+\infty$$

## LÍMITE DE RACIONALES EN EL INFINITO

Si $p$ y $q$ son polinomios entonces (regla de grados):

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mathrm{gr}(p)<\mathrm{gr}(p) \\ \dfrac{a}{b} & \text{si} \quad \mathrm{gr}(p)=\mathrm{gr}(p) \\ \pm\infty & \text{si} \quad \mathrm{gr}(p)>\mathrm{gr}(p) \end{cases}$$

## EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

Recordemos estos límites:

$$\mathrm{e}^{-\infty}=0 \qquad \mathrm{e}^{+\infty}=+\infty$$

$$\ln(0+)=-\infty \qquad \ln\left(+\infty\right)=+\infty$$

- Ejemplo: Continuidad de $f\left(x\right)=\ln\left(x-1\right)$:

Sólo es discontinua para $x-1=0\rightarrow x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(1\right)=\ln\left(0\right)=\emptyset \\ f\left(1+\right)=\ln\left(+0\right)=-\infty \end{array}\right\}\rightarrow \text{Salto infinito}$$

- Ejemplo: Veamos límites con exponenciales

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)=\mathrm{e}^{+\infty}+1=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)=\mathrm{e}^{-\infty}+1=0+1=0$$

## ASÍNTOTAS

**Verticales**:

$x=a$ si $\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$

**Horizontales**

$y=b$ si $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=b$

**Oblicuas**

$$y=mx+n \quad \text{si} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m\neq 0 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=n \end{cases}$$

- Ejemplo: Asíntotas de

$$y=\frac{2x+1}{x-3}$$

Verticales:

$$x-3=0\rightarrow x=3$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{x-3}=\left[\frac{7}{0}\right]=\pm\infty$$

Horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x-3}=\frac{2}{1}=2\rightarrow y=2$$

Oblicuas:

No hay, al tener horizontal para $x\rightarrow\pm\infty$.

- Ejemplo: Asíntotas de

$$y=\frac{2x^3}{1+x^2}$$

Verticales:

$$1+x^2=0\rightarrow x^2=-1\rightarrow \text{no}$$

Horizontales

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3}{1+x^2}=\pm\infty\rightarrow\text{no}$$

Oblicuas

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3}{x+x^3}=2$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{1+x^2}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x}{1+x^2}=0$$

$$y=2x$$