7 GEOMETRÍA PLANA

REFERENCIAS Y COORDENADAS

Un sistema de referencia en el plano es una terna $\mathscr{R} = \{O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\}$ donde O es un punto fijo, llamado origen de la referencia, y $\{\vec{u}\,,\vec{v}\}$ es una base.

Dado un punto cualquiera P, si $\overrightarrow{OP} = x\vec{u} + y\vec{v}$ diremos que las coordenadas de P en $\mathscr{R}$ son $(x\,,y)$.

ECUACIONES DE LA RECTA

Una recta queda determinada por un punto de ella y por un vector con su dirección.

La ecuación **continua** de la recta que pasa por el punto $A = (x_0\,,y_0)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (v_1\,,v_2)$ es

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

Si en la ecuación continua multiplicamos en cruz y pasamos todo a un miembro, obtenemos la ecuación **general**, **cartesiana** o **implícita** de la recta:

$$ax + by + c = 0$$

donde $\vec{v} = (-b\,,a)$ es un vector director de ella.

De la ecuación continua, pasando el v_2 al otro miembro, se deduce la **punto-pendiente**

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

donde

$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

es un número llamado **pendiente** de la recta.

Si despejamos y en cualquier ecuación obtenemos la llamada ecuación **explícita**

$$y = mx + n$$

POSICIONES RELATIVAS

Dos rectas distintas r y s se dice que son **paralelas** cuando comparten un vector director, lo que equivale a decir que tienen la misma pendiente.

Consecuentemente, dos rectas distintas r y s son **secantes** cuando tienen distinta pendiente.

En este caso se cortan en un único punto que es la solución del sistema que forman sus ecuaciones.

ÁNGULO

El **ángulo** que forman dos rectas es el menor que determinan sus respectivos vectores directores.

Si $\quad r : ax + by + c = 0 \quad$ y $\quad r' : a'x + b'y + c' = 0$ entonces el ángulo que forman viene dado por

$$\cos\left(\widehat{r\,,r'}\right) = \frac{|a \cdot a' + b \cdot b'|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Si se conocen sus pendientes, es:

$$\tan(\varphi) = \left|\frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}\right|$$

PERPENDICULARIDAD

En particular, son **perpendiculares** cuando

$$(\widehat{r\,,s}) = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_s$$

Si $\quad r : ax + by + c = 0 \quad$ y $\quad r' : a'x + b'y + c' = 0$ entonces:

$$r \perp r' \longleftrightarrow aa' + bb' = 0 \longleftrightarrow m \cdot m' = -1$$

DISTANCIAS

Se define la **distancia** entre los puntos A y B por:

$$\mathrm{d}\,(A\,,B) \stackrel{def}{=} |\overrightarrow{AB}|$$

Llamamos distancia del punto P a la recta r a

$$\mathrm{d}\,(P\,,r) \stackrel{def}{=} \mathrm{d}\,(P\,,Q)$$

donde Q es el punto de r tal que $\overrightarrow{PQ} \perp r$.

Si $P = (x_0\,,y_0)$ y $r : ax + by + c = 0$ entonces:

$$\mathrm{d}\,(P\,,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Para medir la distancia entre dos rectas paralelas se toma cualquier punto de una recta y se halla la distancia de ese punto a la otra recta.

7 Geometría Plana

Lugares Geométricos

Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad. Se llama ecuación del lugar geométrico a una ecuación

$$F\,(x\,,y) = 0$$

cuyas soluciones son precisamente los puntos del lugar.

La **mediatriz** del segmento $\overline{PQ}$ es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos. Se demuestra que es la recta perpendicular a dicho segmento por su punto medio.

La **bisectriz** de dos rectas se define como el lugar geométrico de puntos que equidistan de ambas. Si $r : ax + by + c = 0$ y $r' : a'x + b'y + c' = 0$ entonces se obtiene de:

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Si r y s son secantes en un punto P, se demuestra que la bisectriz son dos rectas perpendiculares que se cortan en P y que dividen cada región angular por la mitad.

Si r y s son paralelas, la bisectriz es una recta paralela denominada “paralela media”.

Triángulos: Puntos Notables

El **baricentro** es el punto de intersección de las **medianas** (rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto).

El **ortocentro** es el punto de intersección de las **alturas** (rectas que pasando por cada vértice son perpendiculares al lado opuesto).

Circuncentro es el punto de intersección de las **mediatrices**. Es el centro de la circunferencia **circunscrita**.

Incentro es el punto de intersección de las **bisectrices** interiores. Es el centro de la circunferencia **inscrita**.

Circunferencia

Dado un punto $C\,(a\,,b)$ y un número r>0, el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a C es igual a r es una circunferencia, donde C es el centro y r el radio:

$$(x - a)^2 + (x - b)^2 = r^2$$