5 NÚMEROS COMPLEJOS

NÚMEROS IMAGINARIOS

- Se llama unidad imaginaria a $i = \sqrt{-1}$.
  De ahí deducimos que $i^2 = -1$.
- Un número complejo es una expresión de la forma $z = a + bi$ donde i es la unidad imaginaria.
- Observa que es:
  $u = 2 + 3i$ un complejo (su parte real es 2 y su parte imaginaria es 3)
  $v = 5 + 0i = 5$ un número real
  $w = 0 + 4i = 4i$ imaginario puro
- $\mathbb{C}$ designa al conjunto de los números complejos.
- Para representar un número complejo $z = a + bi$ dibujamos en unos ejes de coordenadas una flecha o vector que va desde el origen de coordenadas hasta el punto $P = (a\,,b)$ denominado afijo del número complejo.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Se demuestra que toda ecuación polinómica tiene solución en $\mathbb{C}$. Por ejemplo:

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i$$

SUMA, RESTA Y PRODUCTO

Las operaciones las realizamos como si trabajáramos con polinomios. Sólo hemos de recordar que $i^2 = -1$:

$$2(3+5i) - 4(2+i) = 6 + 10i - 8 - 4i = -2 + 8i$$

$$(3+5i)\cdot(2+i) = 6 + 3i + 10i + 5i^2 = 1 + 13i$$

COCIENTE

Dividimos dos complejos multiplicando ambos por la expresión conjugada del denominador:

$$\frac{4+2i}{1+i} = \frac{(4+2i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{6-2i}{2} = 3 - i$$

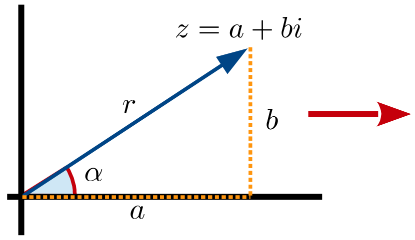
FORMA POLAR Y TRIGONOMÉTRICA

Un complejo z queda determinado por su módulo o longitud r y su argumento α (ángulo que forma con el eje real o de abscisas).

A la expresión

$$z = r_\alpha$$

se la denomina forma polar del número complejo z.



$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{r} \\ \cos\alpha = \dfrac{a}{r} \\ \tan\alpha = \dfrac{b}{a} \end{array} \right.$$

Aquí vemos la relación entre las forma polar y :

$$r_\alpha = r\,(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = r\cos\alpha + ir\operatorname{sen}\alpha = a + bi$$

Por ejemplo:

$$2i = \left\{ \begin{array}{l} r = 2 \\ \alpha = 90^\circ \end{array} \right\} = 2_{90^\circ}$$

$$\sqrt{2}_{135^\circ} = \sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + i\operatorname{sen} 135^\circ) = -1 + i$$

OPERACIONES EN FORMA POLAR

Dados $z = r_\alpha$ y $z' = r'_{\alpha'}$, se cumple:

$z \cdot z' = (r \cdot r')_{\alpha+\alpha'} \quad \rightarrow 2_{60^\circ} \cdot 3_{30^\circ} = 6_{90^\circ}$

$z : z' = (r : r')_{\alpha-\alpha'} \quad \rightarrow 8_{150^\circ} \div 2_{90^\circ} = 4_{45^\circ}$

$z^n = (r^n)_{n\cdot\alpha} \quad \rightarrow (2_{45^\circ})^6 = 64_{6\cdot 45^\circ} = 64_{270^\circ}$

RADICACIÓN

El número complejo r_α tiene n raíces n-ésimas, con

Módulos: $\sqrt[n]{r}$

Argumentos: $\dfrac{\alpha + k\cdot 2\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Por ejemplo, las raíces cúbicas de i son:

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1_{90^\circ}} = \left\{ \begin{array}{l} 1_{(90^\circ + 0\cdot 360^\circ):3} = 1_{30^\circ} \\ 1_{(90^\circ + 1\cdot 360^\circ):3} = 1_{150^\circ} \\ 1_{(90^\circ + 2\cdot 360^\circ):3} = 1_{270^\circ} \end{array} \right.$$

Sus afijos son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 centrada en el origen.