2

Álgebra

Ecuaciones de Primer Grado

- Una **ecuación** de primer grado es la que se reduce a una de la forma $a x+b=0$ con $a\neq 0$.
- Para resolver una ecuación como

$$\frac{x+1}{2}+3(x-2)=\frac{5}{3}$$

Ponemos las fracciones con común denominador:

$$\frac{3(x+1)}{6}+\frac{12(x-2)}{6}=\frac{10}{6}$$

Igualamos los numeradores, quitando paréntesis:

$$6x+6+12x-24=10$$

Trasponemos términos:

$$6x+12x=10+24-6$$

Reducimos:

$$18x=28$$

Despejamos y obtenemos la solución:

$$x=\frac{28}{18} \to x=\frac{14}{9}$$

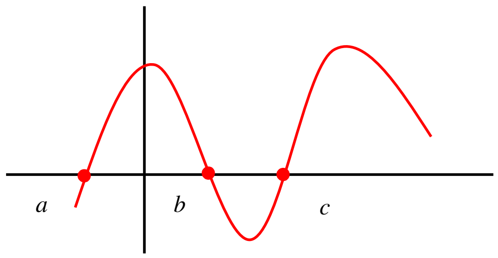
Ese valor es la solución de la ecuación.

- En una ecuación no debemos dividir ambos miembros por una expresión que pueda anularse: eliminaríamos soluciones. Deberíamos pasar todo a un miembro y extraer factor común.

  Si al resolver multiplicamos ambos miembros por una expresión algebraica o elevamos al cuadrado podríamos obtener una ecuación con más soluciones que la original. Deberemos comprobar las posibles soluciones para eliminar las extrañas.

Ecuaciones y Gráficas

Las soluciones de la ecuación $P(x)=0$ las apreciamos en los puntos de **corte** de la gráfica de la función $y=P(x)$ con el eje X.



$$P(x)=0 \to x=a \text{ , } x=b \text{ y } x=c$$

Ecuación de Segundo Grado

- En la ecuación de 2º grado $a x^2+b x+c=0$ la solución, si existe, viene dada por la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- Una ecuación de segundo grado puede tener ninguna, una o dos soluciones reales.
- La fórmula también permite resolver las ecuaciones bicuadradas. Por ejemplo:

$$x^4-4x^2+3=0\to x^2=\frac{4\pm 2}{2}\to \left| \begin{array}{l} x^2=3\to x=\pm\sqrt{3} \\ x^2=1\to x=\pm 1 \end{array} \right.$$

Ecuaciones Polinómicas

- Si una ecuación polinómica está factorizada, resolverla se reduce a igualar a cero esos factores:

$$A\cdot B=0\to \left| \begin{array}{l} A=0\to\cdots \\ B=0\to\cdots \end{array} \right.$$

- Para resolverla intentaremos **factorizarla** hasta que los factores sean de primer o segundo grado.

$$(x-a)\cdot(x+b)\cdot(x-c)=0 \to x=a \text{ , } x=-b \text{ , } x=c$$

- $(x-a)$ un divisor o factor sólo si $x=a$ es un cero.
- Recordemos que al factorizar, los únicos polinomios primos son los de primer grado y los de segundo grado sin ceros.

Ecuaciones Radicales

Para resolver una ecuación radical como

$$x=\sqrt{x}+2$$

Primero **aislamos la raíz** en un solo miembro:

$$x-2=\sqrt{x}$$

Después **elevamos al cuadrado** para quitar la raíz:

$$(x-2)^2=(\sqrt{x})^2 \to x^2-4x+4=x$$

A continuación **resolvemos** la ecuación resultante:

$$x^2-5x+4=0 \to x=1 \text{ ó } x=4$$

Finalmente **comprobamos** en la ecuación original:

$$x=1 \to 1=\sqrt{1}+2 \to 1=3 \to \text{NO}$$

$$x=4 \to 4=\sqrt{4}+2 \to 4=4 \to \text{SI}$$

2 ÁLGEBRA

SISTEMAS DE ECUACIONES

Un **sistema de ecuaciones**, como por ejemplo,

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

es un conjunto de ecuaciones que deben cumplirse **simultáneamente**. Eso sólo ocurre al sustituir en ambas igualdades $x = 2$ e $y = 1$. Su solución es

$$(x, y)=(2, 1)$$

Se interpreta **gráficamente** como la **intersección** de la recta $r: x+2y=4$ con la recta $s: 2x-y=3$.

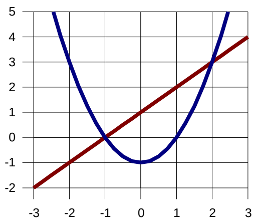
En el caso de un sistema **no lineal** como

$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=x^2-1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$$(x, y)=(-1, 0) \quad , \quad (x, y)=(2, 3)$$

Y se interpretan gráficamente como la intersección de la **recta** $y=x+1$ con la **parábola** $y=x^2-1$:



Hay tres métodos para resolver algebraicamente un sistema: **sustitución**, **igualación** y **reducción**.

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Veamos cómo resolver la ecuación **exponencial**

$$2^x+2^{x-1}=12$$

$$2^x+\frac{2^x}{2}=12 \xrightarrow{2^x=t} t+\frac{t}{2}=12 \rightarrow t=8 \rightarrow 2^x=2^3 \rightarrow x=3$$

Hemos aplicado las propiedades de las potencias y hecho un cambio de variable.

Veamos cómo resolver la ecuación **logarítmica**

$$\log_2(x+2)-\log_2 x=1$$

$$\log_2\left(\frac{x+2}{x}\right)=\log_2 2 \rightarrow \frac{x+2}{x}=2 \rightarrow x+2=2x \rightarrow x=2$$

Hemos aplicado las propiedades de los logaritmos y luego igualado los argumentos.

INECUACIONES

Para resolver algebraicamente una una **inecuación**

$$f(x)<0 \quad , \quad f(x)>0 \quad , \quad f(x)\leq 0 \quad , \quad f(x)\geq 0$$

1º Calculamos sus **ceros** (los del numerador y los del denominador si es una fracción algebraica).

2º Obtenemos sus **intervalos de signo**: la expresión tiene el mismo signo en cada uno de los intervalos que delimitan los ceros.

Para averiguarlo sustituimos x por un número cualquiera de cada intervalo.

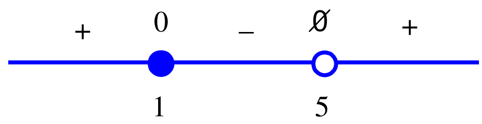
3º Señalamos la **solución**: indicamos cuál (o cuáles) de los intervalos anteriores cumple la desigualdad.

Por ejemplo: resolvamos la inecuación $\dfrac{x-1}{x-5}\geq 0$

1º **Ceros**:

- Del numerador: $x-1=0 \rightarrow x=1$
- Del denominador: $x-5=0 \rightarrow x=5$

2º **Intervalos de signo**:



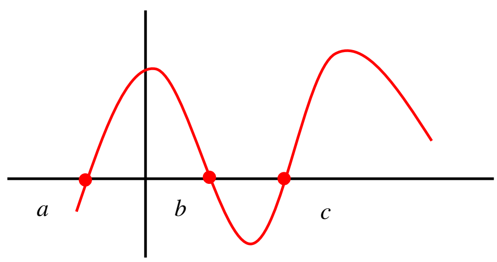
3º **Solución**: la fracción es positiva o cero en

$$S=(-\infty, 1] \cup (5, +\infty)$$

Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, en los intervalos del eje **X** en los que la curva está

- está por **encima** la función es **positiva**: $f(x) > 0$
- está por **debajo** la función es **negativa**: $f(x) < 0$

Así, el estudio de signo correspondiente a



es