1 ARITMÉTICA

NÚMEROS RACIONALES

- Los **números racionales** son las **fracciones** de números enteros (con denominador no nulo).

  Los números **enteros** también son racionales (pueden expresarse con denominador igual a 1).
- Para obtener la **expresión decimal** de una fracción **se divide** el numerador entre el denominador. Se obtiene siempre:
  1. Un número decimal **exacto** (2.45 ; 3.125).
  2. Un número decimal **periódico** ($2.\widehat{3}$; $1.7\widehat{5}$)
- Recíprocamente, todo decimal exacto o periódico puede expresarse como un número racional:
$$1.5\widehat{32} = \frac{1532-15}{990} = \frac{1517}{990}$$
- Siempre podremos dibujar un segmento cuya longitud sea igual a un número racional dado. Para ello podemos usar el **Teorema de Tales**.

NÚMEROS IRRACIONALES

Los números **decimales no periódicos** se denominan números **irracionales**.

Ejemplos de números irracionales son $\sqrt{n}$ (donde n es un entero que no es cuadrado) o el famoso π.

NÚMEROS RADICALES

- $\sqrt[n]{a}$ es el número que elevado a n nos da a:
$$\sqrt[n]{a} = b \overset{\text{def}}{\iff} b^n = a$$
- Por ejemplo: $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$.
- Hay radicales que **no existen**, como $\sqrt{-9}$.
- Se usan para despejar la base de una potencia:

  $x^5 = 10 \to x = \sqrt[5]{10} = 1.58489\ldots$

  $x^4 = 64 \to x = \pm\sqrt[4]{64} = \pm 2$

- <u>Propiedades básicas</u>:
  - Simplificación: $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$
  - Producto: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$
  - Cociente: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
  - Raíz de raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

- Los números radicales **no** se **suman** así:
$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \overset{nopoo}{=} \sqrt[n]{a+b}$$
  Hay que sacar factores **fuera** y **agregar** los **semejantes**:
$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$
- **Racionalizar** es eliminar radicales de los denominadores. Hay dos procedimientos:
$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$
$$\frac{2}{4-\sqrt{3}} = \frac{2}{4-\sqrt{3}}\cdot\frac{4+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = \frac{8+2\sqrt{3}}{13}$$

APROXIMACIONES

- El conjunto de los números **reales** ($\mathbb{R}$) es el formado por **todos los números decimales**, racionales o irracionales. Esquema:
$$\textit{Reales}\begin{cases}\textit{Racionales} & = \text{Decimales exactos o periódicos}\\ \textit{Irracionales} & = \text{Decimales no periódicos}\end{cases}$$
- Aproximar, en un cálculo o resultado, el número real x es sustituirlo por otro número r. Diremos en este caso que r es una **aproximación** de x.
  - Si r es menor que x se dice que la aproximación es por **defecto**.
  - Si r es mayor que x se dice que la aproximación es por **exceso**.
  - El **error** absoluto es la diferencia entre el número real y la aproximación:
$$\varepsilon = |x - r|$$

EXPONENTES

- <u>Definición</u>:
$$a^0 = 1\,,\ a^n = a \overset{n \text{ veces}}{\cdots} a\,,\ a^{-n} = (1/a)^n\ ,\ a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$
- <u>Propiedades básicas</u>:
  - Producto de igual base: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
  - Cociente de igual base: $a^x : a^y = a^{x-y}$
  - Potencia de potencia: $(a^x)^y = a^{xy}$
  - Multi de igual exponente: $a^x b^x = (ab)^x$
  - Divi de igual exponente: $a^x : b^x = (a:b)^x$

1 Aritmética

Notación Científica

Un número en notación científica tiene este aspecto:

$$N = \underbrace{a}_{\text{parte entera}} \; . \; \underbrace{bcd\ldots}_{\text{parte decimal}} \cdot \underbrace{10^n}_{\text{orden}}$$

Por ejemplo:

$15\,000\,000 = 15 \cdot 10^6 = 1.5 \cdot 10^7$
$0.00007 = 7 \cdot 10^{-5}$

Así se introduce en la calculadora:

9.1 EXP -7

Logaritmos

Se llama **logaritmo en base** a del número x, y se designa por $\log_a x$, al **exponente** al que hay que elevar a para obtener x.

$$\log_a x = y \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} a^y = x$$

Por ejemplo:

$$\log_3 9 = 2 \;\text{ porque }\; 3^2 = 9$$
$$\log_5 \frac{1}{25} = -2 \;\text{ porque }\; 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

Las propiedades de los logaritmos son:

Log de uno:	$\log_a 1 = 0$
Log de la base:	$\log_a a = 1$
Log del producto:	$\log_a (x \cdot y) = \log_a (x) + \log_a (y)$
Log del cociente:	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a (x) - \log_a (y)$
Log de potencia:	$\log_a (x^y) = y \cdot \log_a (x)$
Cambio de base:	$\log_a (x) = \frac{\log_b (x)}{\log_b (a)}$

Los logaritmos son útiles para poder **despejar exponentes**:

$$a^x = b \to x = \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Con la fórmula del cambio de base y una calculadora podemos aproximar cualquier logaritmo. En ella hay dos teclas para los logaritmos: **decimales** y **neperianos**:

log ln

Ordenación

Se dice que el número a es **menor** que el número b, y se escribe $a < b$, si $b - a$ es positivo.

También hay desigualdades **no estrictas**:

$$a \leq b \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} a < b \text{ o } a = b$$

Con las desigualdades podemos formar **intervalos** en la recta. Por ejemplo:

Es el intervalo abierto–cerrado $(1\,,5] = \{1 < x \leq 5\}$.

Es el intervalo cerrado $[2\,,+\infty) = \{2 \leq x < +\infty\}$

Signos de Expresiones

El **signo** de una expresión algebraica (polinomio o fracción algebraica)

$$f(x)$$

depende del valor de x.

Para analizarlo, se procede así:

1. **Ceros**: obtenemos sus ceros, calculando los del numerador y del denominador de la expresión si fuera una fracción algebraica.
2. **Intervalos de signo**: la expresión tiene el mismo signo en cada uno de los intervalos que delimitan los ceros.

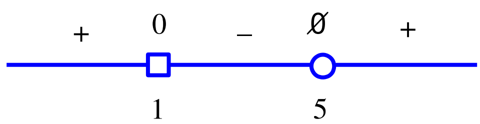
   Para averiguarlo sustituimos x por un número cualquiera de cada intervalo.

Por ejemplo: estudiemos el signo de $f = \dfrac{x-1}{x-5}$.

1º **Ceros**:

- Del numerador: $x - 1 = 0 \to x = 1$
- Del denominador: $x - 5 = 0 \to x = 5$

2º **Intervalos de signo**:



Observemos que es $f > 0$ cuando tomamos x en

$$S = (-\infty\,,1) \cup (5\,,+\infty)$$