TEMA 1

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Introducción práctica
al
Cálculo de Probabilidades
a través de
Ejercicios y Problemas.

José Álvarez Fajardo

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

EXPERIENCIAS ALEATORIAS – SUCESOS

Se llama **experiencia aleatoria** a aquella en la que, bajo condiciones fijas, pueden ocurrir un número concreto de resultados, pero no es posible predecir cuál sucederá.

En una experiencia aleatoria se denomina:

- **Espacio muestral** –*E*– al conjunto de todos los posibles resultados.
- **Suceso** a cualquier subconjunto de *E*.
- **Suceso elemental** al formado por un único elemento de *E*.
- Entre los sucesos nos encontramos al **suceso imposible** $\emptyset$ y al **suceso seguro** *E*.

Los sucesos pueden definirse por **comprensión**, a través de una propiedad característica que lo determina, o por **extensión**, señalando cada uno de sus elementos.

OPERACIONES CON SUCESOS

Dados dos sucesos A y B, llamamos:

- Suceso **unión** $(A \cup B)$ al formado por la reunión de los resultados, los que están en *A* o en *B* y sucede cuando ocurre alguno de ellos.
- Suceso **intersección** $(A \cap B)$ al formado por los resultados comunes, los que están en *A* y en *B* y sucede cuando ocurren ambos.
- Suceso **diferencia** $(A \setminus B)$ al que acontece cuando ocurre *A* y no *B*; esto es, es el formado por los elementos de *A* que no están en *B*.

El **contrario** del suceso *A* es el formado por los resultados que no están en A, esto es: $\overline{A} = E \setminus A$.

Diremos que los sucesos *A* y *B* son **incompatibles** cuando $A \cap B = \varnothing$.

Contrarios de la unión y de la intersección (Leyes de Morgan):

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad , \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

Si realizamos *n* veces una experiencia aleatoria y un suceso *A* se verifica en $n(A)$ ocasiones, se llama **frecuencia relativa** de *A* al número

$$f(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Cuando $n \to \infty$ se tiene que $f(A)$ se estabiliza hacia cierto valor $\mathrm{p}(A)$, que llamaremos **probabilidad** del suceso *A*.

REGLA DE LAPLACE

Si el espacio muestral de una experiencia consta de un número finito de resultados que están en igualdad de condiciones de suceder (son equiprobables), la probabilidad de un suceso *A* es:

$$\mathrm{p}(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}}$$

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

En todo experimento aleatorio se verifican estas propiedades elementales:

- La probabilidad es un número comprendido entre 0 y 1, de modo que
$$\mathrm{p}(\emptyset) = 0 \text{ y } \mathrm{p}(E) = 1$$
- La probabilidad del suceso contrario cumple:
$$\mathrm{p}(A) + \mathrm{p}\left(\overline{A}\right) = 1$$
- Las probabilidades de la unión y de la intersección están relacionadas por:
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA. INDEPENDENCIA

Si A y B son sucesos, la "probabilidad de B **condicionada** por A" o la "probabilidad de que ocurra B supuesto que ha sucedido A" viene dada por

$$\mathrm{p}(B/A) = \frac{\mathrm{p}(A \cap B)}{\mathrm{p}(A)}$$

donde $\mathrm{p}(A) \neq 0$.

Puede despejarse la probabilidad de la intersección:

$$\mathrm{p}(A \cap B) = \mathrm{p}(A) \cdot \mathrm{p}(B/A)$$

Decimos que *A* y *B* son **independientes** si el hecho de que uno ocurra no afecta a la probabilidad del otro:

$$\mathrm{p}(B/A) = \mathrm{p}(B)$$

Y esto sucede precisamente cuando se cumple la siguiente igualdad (**criterio de independencia**):

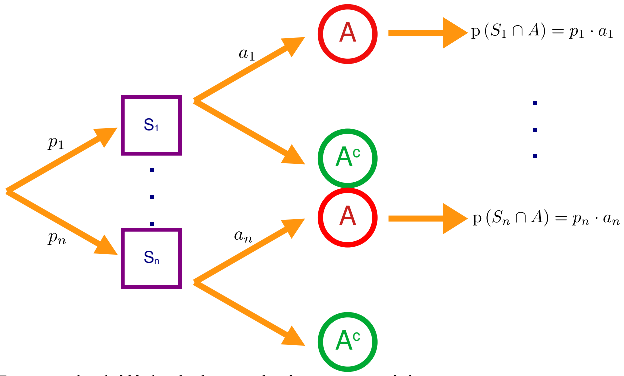
$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Experimentos Compuestos

Hay experimentos aleatorios que pueden considerarse como la concatenación de varios experiencias "más simples". En ese caso se dice que cada uno de éstos es una **fase** o etapa, y que estamos ante un **experimento compuesto**.

En ellos normalmente encontramos un conjunto de sucesos incompatibles dos a dos que cubren todos los resultados posibles S_1, S_2, … , S_n (sistema completo de sucesos) y es fácil obtener las probabilidades de que ocurra un suceso A supuesto que han sucedido cada uno de ellos.

Es útil construir un diagrama de árbol y colocar en cada rama las probabilidades.



La probabilidad de cada intersección

$$p(S \cap A) = p(S) \cdot p(A/S)$$

es el producto de las que nos encontramos en el camino.

Probabilidad Total

La probabilidad de A es el total de la suma de las probabilidades de los caminos que concluyen en él. Formulísticamente

$$p(A) = \sum_{k=1}^{n} p(S_k) \cdot p(A/S_k)$$

Fórmula de Bayes

Cuando un suceso A ocurre al finalizar el experimento y nos interesamos por un suceso S_i que ocurrió previamente se dice que estamos ante una "probabilidad condicionada **a posteriori**" y a la fórmula de la probabilidad condicionada se la denomina de Fórmula de **Bayes**:

$$p(S_i/A) = \frac{p(S_i \cap A)}{p(A)}$$

Y que es la siguiente bestiajo-fórmula que habitualmente vemos en los libros:

$$p(S_i/A) = \frac{p(S_i) \cdot p(A/S_i)}{\sum_{k=1}^{n} p(S_k) \cdot p(A/S_k)}$$

Espacio muestral, sucesos, Regla de Laplace,...

EJERCICIO 1:

Lanzamos un dado equilibrado con las caras numeradas del 1 al 6 y anotamos el resultado.

a) ¿Se trata de un experimento aleatorio o determinista?

b) Escribe todos los resultados que componen el espacio muestral.

c) Escribe los resultados que componen los siguientes sucesos:

A = "sale par" y B = "sale un número mayor que 3"

d) Obtengamos los sucesos su unión y su intersección.

e) Escribe los resultados que componen sus contrarios: $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

f) Halla los sucesos $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ e indica la relación que guardan entre sí.

g) Consideremos el suceso C= "sale menor que 4". ¿Son A y C dos sucesos incompatibles? ¿Y B y C?

EJERCICIO 2:

Lanzamos dos dados de cuatro caras numeradas del 1 al 4 y anotamos la pareja obtenida. Consideremos:

A = "sale un doble" , B = "el primer número es un 2" , C = "la suma de los puntos es 4"

a) Escribe el espacio muestral.

b) Halla las probabilidades de los sucesos A, B y C.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no salga un doble? ¿Qué relación guarda con la probabilidad de A?

d) Comprueba que se cumple la siguiente identidad que relaciona las probabilidades de unión e intersección:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Tablas de contingencia

EJERCICIO 3:

En una experiencia, la probabilidad de que ocurra el suceso A es 0.3 y la de que ocurra otro suceso B es 0.6. También sabemos que la probabilidad de que sucedan ambos es 0.2.

a) Calculemos la probabilidad de que ocurra A pero no B.

b) Hallemos la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos.

c) Obtengamos la probabilidad de que suceda sólo uno de los dos.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra alguno de ellos?

EJERCICIO 4:

En un club el 65% de los socios practica el Tenis, el 45% el Baloncesto y el 80% alguno de esos dos deportes.

a) ¿Qué porcentaje practica ambos?

b) Halla el porcentaje de miembros que no practica ninguno de los dos.

c) Calcula el porcentaje de socios que juega al Tenis pero no al Baloncesto.

d) Obtén la probabilidad de que un socio juegue sólo uno de esos dos deportes.

Probabilidad condicionada. Dependencia de sucesos

EJERCICIO 5:

Una bolsa contiene una serie de bolas esféricas idénticas en tamaño y peso. Tres de ellas están rotuladas con un 1 y las otras con un 2. Dos de las tres rojas que hay tienen un 1, hay una verde con cada uno de los dos números y la bola restante es amarilla.

a) Realiza una tabla de doble entrada que responda al contenido.

b) Se va a sacar, al azar, una bola. Calcula las probabilidades de los siguiente sucesos:

1) p (① ∩ Ⓡ)

2) p (① ∩ Ⓥ)

PROBABILIDAD CONDICIONADA

c) Se saca una bola y apreciamos que es roja, aunque no hemos visto el número. ¿Cuál es la probabilidad de que esté rotulada con un 1?

Nota: es la "probabilidad de obtener un 1 sabiendo que ha salido roja" y se escribe p (① / Ⓡ).

d) Comprueba que se cumple la siguiente relación:

p (① / Ⓡ) = p (① ∩ Ⓡ) / p (Ⓡ)

e) Se saca una bola y apreciamos que es verde, aunque no hemos visto el número. ¿Cuál es la probabilidad de que esté rotulada con un 1?

f) Comprueba que se cumple la siguiente relación:

p (① / Ⓥ) = p (① ∩ Ⓥ) / p (Ⓥ)

DEPENDENCIA

g) Observa que p (① / Ⓥ) = p (①) mientras que p (① / Ⓡ) ≠ p (①): la probabilidad del suceso "salir 1" no se ve alterada si ha ocurrido "sale bola verde" mientras que sí se ve modificada por ocurrir "sale bola roja".

En el primer caso se habla de sucesos "independientes" mientras que en el segundo se habla de "dependientes". Comprueba que se cumple:

p (① ∩ Ⓥ) = p (①) · p(Ⓥ)

p (① ∩ Ⓡ) ≠ p (①) · p(Ⓡ)

EJERCICIO 6:

En un club deportivo el 60% de los socios practica atletismo (A) y que el 30% juega al baloncesto (B). Se sabe que el 20% de los atletas también juegan a baloncesto.

a) ¿Qué porcentaje de socios practica ambos deportes?

b) ¿Qué porcentaje de socios practica alguno de esos dos deportes?

c) Halla el porcentaje de socios que no practica ninguno de los dos deportes.

d) Elegimos un socio al azar: ¿qué probabilidad hay de que practique sólo uno de esos dos deportes?

EJERCICIO 7:

Tenemos una bolsa con cinco fichas numeradas del 1 al 5. Sacamos dos fichas, anotando los números que hemos obtenido en cada extracción. Consideramos los sucesos

A = "la suma de los resultados es al menos 7"

B = " el primer número es impar".

a) Escribe el espacio muestral.

b) Expresa los sucesos por extensión (escribiendo los resultados) y halla sus probabilidades.

c) Estudia si son sucesos independientes comprobando si se cumple la condición $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

d) Obtén la probabilidad de que suceda el segundo sabiendo que ha ocurrido el primero.

Experiencias compuestas: diagrama de árbol

EJERCICIO 8:

En una habitación hay dos urnas, A y B, que contienen bolas idénticas salvo en su color. La urna A contiene 1 bola roja y 3 verdes; la urna B tiene 2 negras y 2 verdes. Se elige una urna al azar y se extrae una bola.

a) Hagamos un diagrama de árbol que muestre el desarrollo de la experiencia y todos los caminos posibles.

b) Indiquemos en el árbol la probabilidad de elegir la urna A, así como la probabilidad de sacar bola roja de la urna A.

c) Vamos a calcular la probabilidad de elegir la urna A y sacar bola roja: se multiplican las probabilidades de cada tramo del camino.

d) Obtengamos de la misma forma la probabilidad de elegir la urna B y sacar bola verde.

EJERCICIO 9:

Tomamos una baraja española. Sacamos una carta y, tras devolverla al mazo, sacamos otra.

Hallemos la probabilidad de que ambas sean bastos.

Probabilidad total / Bayes

EJERCICIO 10: [RESUELTO]

En un mueble de cocina nos encontramos con dos cajones aparentemente idénticos. El cajón superior contiene 10 tenedores junto con 5 cucharas, mientras que en el inferior hay 7 tenedores y 8 cucharas.

a) Abrimos un cajón al azar y sacamos, sin mirar, un cubierto. Vamos a obtener la probabilidad de que sea cuchara.

Sugerencia: Para ello sumamos las probabilidades de los caminos favorables a la obtención del resultado buscado (se denomina **probabilidad total**). Formulísticamente sería

$$\mathrm{p}(C) = \mathrm{p}(I) \cdot \mathrm{p}(C/I) + \mathrm{p}(S) \cdot \mathrm{p}(C/S)$$

b) Si entramos en la cocina y vemos que una persona ya ha sacado una cuchara, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del cajón superior?

Nota: Observa que ya ha sucedido el experimento y se trata de calcular la probabilidad de que haya ocurrido un suceso en el desarrollo de la experiencia. Se trata, pues, de una **probabilidad condicionada** por el resultado: es una probabilidad **a posteriori**. Y a la fórmula de la probabilidad condicionada se le llama en estos casos **Fórmula de Bayes.**

Formulísticamente sería

$$\mathrm{p}\left(S/C\right) = \frac{\mathrm{p}\left(S \cap C\right)}{\mathrm{p}\left(C\right)} = \frac{\mathrm{p}\left(S\right) \cdot \mathrm{p}\left(C/S\right)}{\mathrm{p}\left(I\right) \cdot \mathrm{p}\left(C/I\right) + \mathrm{p}\left(S\right) \cdot \mathrm{p}\left(C/S\right)}$$

EJERCICIO 11:

A una asamblea en la Universidad asisten 420 alumnos de los cuales 180 son de Empresariales, 72 de Relaciones Laborales y el resto de Derecho. Un tercio de los alumnos de Empresariales, dos tercios de los de Derecho y 16 alumnos de Relaciones Laborales votan NO a la huelga. El resto ha votado SÍ.

a) Calcule la probabilidad de que elegido un alumno al azar, sea de Empresariales y haya votado SÍ a la huelga.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que elegido un alumno al azar haya votado SÍ a la huelga?

c) Si elegido un alumno al azar, resulta que ha votado NO a la huelga, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Relaciones Laborales?

EJERCICIO 12:

En una urna hay 10 bolas verdes y cinco rojas.

a) Si sacamos dos bolas, una a continuación de otra, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean del mismo color?

b) ¿Y de que la segunda sea roja?

c) Si se han sacado dos bolas y la segunda es verde, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo fuese?

EJERCICIO 13:

En un dormitorio hay dos mesitas de noche idénticas situadas a ambos lados de la cama. Pero la de la derecha está más cercana al baño y por ello la probabilidad de sacar una prenda de ella es el doble que sacarla de la otra. La de la izquierda contiene 3 calzoncillos y 5 braguitas mientras que la de la derecha 6 calzoncillos y 2 braguitas.

Veo que mi amiga lleva puestas unas braguitas que ha cogido de una de las dos mesitas. ¿De cuál de ellas es más probable que las haya cogido?

Soluciones

EJERCICIO 1:

a) Es aleatoria porque cada lanzamiento conocemos todos sus posibles resultados pero no podemos predecir cuál se obtendrá.

b) El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados:

$$E = \{1\,,2\,,3\,,4\,,4\,,5\,,6\}$$

c) Escribimos los resultados que componen los sucesos entre llaves y separados por comas:

A = "sale par" = $\{2\,,4\,,6\}$

B = "sale un número mayor que 3" = $\{4\,,5\,,6\}$

d) Su unión consta de la reunión de todos sus resultados, los que están en A o en B, en alguno de ellos. Mientras que en su intersección están los resultados comunes, los que están en A y en B, en ambos:

$$A \cup B = \{2\,,4\,,5\,,6\}\,,\, A \cap B = \{4\,,6\}$$

e) El contrario de un suceso S está formado por los resultados del espacio muestral que no están en S:

$$\overline{A} = \{1\,,3\,,5\}\,,\, \overline{B} = \{1\,,2\,,3\}$$

f) Contrario de la unión: $\overline{A \cup B} = \{1\,,3\}$

Unión de los contrarios: $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1\,,2\,,3\,,5\}$

Contrario de la intersección: $\overline{A \cap B} = \{1\,,2\,,3\,,5\}$

Intersección de los contrarios: $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\,,3\}$

Observamos que se cumple:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad , \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

g) Es $C = \{1\,,2\,,3\}$: Consideremos el suceso C= "sale menor que 4". ¿Son A y C dos sucesos incompatibles? ¿Y B y C?

$A \cap C = \{2\} \neq \emptyset \;\rightarrow\;$ Son compatibles

$B \cap C = \{\} = \emptyset \;\rightarrow\;$ Son incompatibles

EJERCICIO 2:

a) El espacio muestral es

$$E = \left\{ \begin{array}{cccc} 1-1 & 1-2 & 1-3 & 1-4 \\ 2-1 & 2-2 & 2-3 & 2-4 \\ 3-1 & 3-2 & 3-3 & 3-4 \\ 4-1 & 4-2 & 4-3 & 4-4 \end{array} \right\}$$

b) Halla las probabilidades de los sucesos A, B y C.

$A = \{1-1\,,2-2\,,3-3\,,4-4\} \;\rightarrow\; \mathrm{p}(A) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

$B = \{2-1\,,2-2\,,3-3\,,4-4\} \;\rightarrow\; \mathrm{p}(B) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

$C = \{1-3\,,2-2\,,3-1\} \;\rightarrow\; \mathrm{p}(C) = \dfrac{3}{16}$

c) Hay 16–4 $=12$ resultados que no son doble, así que la probabilidad de que no salga un doble es $12/16$.

Pero observando que la se trata del suceso contrario de A y que éste ocurre 1 de cada 4 veces, para el contrario quedan 3 de cada 4 veces, así:

$$\mathrm{p}\left(\overline{A}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Se tiene que es $\mathrm{p}\left(A\right)+\mathrm{p}\left(\overline{A}\right)=1$

d) La fórmula es lógica, pues el contar los casos favorables en la reunión sumamos los que hay en A más los que hay en B, pero hemos de restar los repetidos para no contarlos dos veces:

$$A\cup B=\{1-1\,,2-1\,,2-2\,,2-3\,,2-4\,,3-3\,,4-4\}\,,\ A\cap B=\{2-2\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{p}\left(A\cup B\right)=\dfrac{7}{16}\\ \mathrm{p}\left(A\right)+\mathrm{p}\left(B\right)-\mathrm{p}\left(A\cap B\right)=\dfrac{4}{16}+\dfrac{4}{16}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{7}{16}\end{array}\right\}\rightarrow\mathrm{p}\left(A\cup B\right)=\mathrm{p}\left(A\right)+\mathrm{p}\left(B\right)-\mathrm{p}\left(A\cap B\right)$$

EJERCICIO 3:

$$\mathrm{p}\left(A\right)=0.3\ ,\ \mathrm{p}\left(B\right)=0.6\ ,\ \mathrm{p}\left(\text{"ambos"}\right)=\mathrm{p}\left(A\cap B\right)=0.2$$

a) Organicemos todas las probabilidades en una tabla de contigencia (en verde lo que calculamos nosotros):

	A	$\overline{A}$	
B	0.2	0.4	0.6
$\overline{B}$	0.1	0.3	0.4
	0.3	0.7	1

b) Que no suceda "ninguno" es que "no suceda A y que no suceda B", y la probabilidad la vemos en la tabla:

$$\mathrm{p}\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0.3$$

c) Suceder "sólo uno" es la unión de $\overline{A}\cap B$ y $A\cap\overline{B}$, de donde:

$$\mathrm{p}\left(\text{ "sólo sucede uno de los dos" }\right)=0.1+0.4=0.5$$

d) Que suceda "alguno de los dos" es que ocurra "A o B", esto es, la unión de ambos (no es la misma que antes):

$$\mathrm{p}\left(A\cup B\right)=\mathrm{p}\left(A\right)+\mathrm{p}\left(B\right)-\mathrm{p}\left(A\cap B\right)=0.3+0.6-0.2=0.7$$

Observemos que también podríamos haber la obtenido razonando que "alguno" es lo contrario de "ninguno" y como esta probabilidad la obtuvimos en (b) la probabilidad pedida es $1-0.3=0.7$.

EJERCICIO 4:

Llamemos $T=$ "practicar tenis" y $B=$ "jugar al baloncesto". Así:

$$\mathrm{p}\left(T\right)=0.65\ ,\ \mathrm{p}\left(B\right)=0.45\ ,\ \mathrm{p}\left(\text{"alguno"}\right)=\mathrm{p}\left(T\cup B\right)=0.80$$

a) Que sucedan "ambos" es que ocurran "T y B", esto es, la intersección de ambos:

$$\mathrm{p}\left(T\cap B\right)=\mathrm{p}\left(T\right)+\mathrm{p}\left(B\right)-\mathrm{p}\left(T\cup B\right)=0.65+0.45-0.80=0.30\rightarrow\text{el }30\%$$

Para las siguientes cuestiones puede ser útil una tabla de contingencia de probabilidades:

	T	$\overline{T}$	
B	0.30	0.35	0.65
$\overline{B}$	0.15	0.20	0.35
	0.45	0.55	1

b) Que no suceda “ninguno” es que “no suceda B y que no suceda T”, y la probabilidad la vemos en la tabla:

$$\mathrm{p}\left(\overline{B} \cap \overline{T}\right) = 0.20$$

c) Que no juegue al tenis pero no al baloncesto es: “T sí y B no”. La probabilidad la vemos en la tabla:

$$\mathrm{p}\left(T \cap \overline{B}\right) = 0.15$$

d) Suceder “sólo uno” es la unión de $\overline{T} \cap B$ y $T \cap \overline{B}$, de donde:

$$\mathrm{p}\,(\text{ ”sólo sucede uno de los dos” }) = 0.15 + 0.35 = 0.5$$

EJERCICIO 5:

a) Una tabla de doble entrada que responde al contenido es

	Ⓡ	Ⓥ	Ⓐ	
①	2	1	0	3
②	1	1	1	3
	3	2	1	6

b) Al sacar una bola al azar:

1) p (① ∩ Ⓡ) = 2 / 6 = 1 / 3

2) p (① ∩ Ⓥ) = 1 / 6

c) La probabilidad condicionada de “obtener un 1 sabiendo que ha salido roja” es

p (① / Ⓡ) = “número de rojas con un 1” / “número de rojas” = 2 / 3

d) Tenemos que se cumple la igualdad:

p (① ∩ Ⓡ) / p (Ⓡ) = 2 / 6 : 3 / 6 = 2 / 3 = p (① / Ⓡ)

e) La probabilidad condicionada de “obtener un 1 sabiendo que ha salido verde” es:

p (① / Ⓥ) = “número de verdes con un 1” / “número de verdes” = 1 / 2

f) Tenemos que se cumple la igualdad:

p (① ∩ Ⓥ) / p (Ⓥ) = 1 / 6 : 2 / 6 = 1 / 2 = p (① / Ⓥ)

g) p (①) · p(Ⓥ) = 3 / 6 · 2 / 6 = 1 / 6 = p (① ∩ Ⓥ) → Independientes

p (①) · p(Ⓡ) = 3 / 6 · 3 / 6 = 1 / 4 ≠ 1 / 3 = p (① ∩ Ⓡ) → Dependientes

EJERCICIO 6:

Llamemos A = "practicar atletismo" y B = "jugar al baloncesto". Así

$$\mathrm{p}\,(A)=0.60\ ,\ \mathrm{p}\,(B)=0.30\ ,\ \mathrm{p}\,(\text{"baloncesto de entre los atletas"})=\mathrm{p}\,(B/A)=0.20$$

a) Practicar "ambos" es que practiquen "A y B", esto es, la intersección:

$$\mathrm{p}\,(B/A)=\frac{\mathrm{p}\,(A\cap B)}{\mathrm{p}\,(A)}\rightarrow \mathrm{p}\,(A\cap B)=\mathrm{p}\,(A)\cdot \mathrm{p}\,(B/A)=0.6\cdot 0.2=0.12\rightarrow\ \text{el } 12\%$$

b) Practicar "alguno de los dos" es practicar "A o B", esto es, la unión de ambos:

$$\mathrm{p}\,(A\cup B)=\mathrm{p}\,(A)+\mathrm{p}\,(B)-\mathrm{p}\,(A\cap B)=0.60+0.30-0.12=0.78\rightarrow\ \text{el } 78\%$$

Para las siguientes cuestiones puede ser útil una tabla de contingencia de probabilidades:

	A	$\overline{A}$	
B	0.12	0.18	0.30
$\overline{B}$	0.48	0.22	0.70
	0.60	0.40	1

c) Que no suceda "ninguno" es que "no suceda A y que no suceda B", y la probabilidad la vemos en la tabla:

$$\mathrm{p}\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0.22\rightarrow\ \text{el } 22\%$$

d) Practicar "sólo uno" es la unión de $\overline{A}\cap B$ y $A\cap\overline{B}$, de donde:

$$\mathrm{p}\,(\text{ "sólo practica uno de los dos" })=0.48+0.18=0.66$$

EJERCICIO 7:

a) El espacio muestral está formada por las parejas del 1 al 5 excepto los dobles:

$$E=\left\{\begin{array}{ccccc} & 1-2 & 1-3 & 1-4 & 1-5\\ 2-1 & & 2-3 & 2-4 & 2-5\\ 3-1 & 3-2 & & 3-4 & 3-5\\ 4-1 & 4-2 & 4-3 & & 4-5\\ 5-1 & 5-2 & 5-3 & 5-4 & \end{array}\right\}\rightarrow 25-5=20\text{ resultados}$$

b) Escribimos los sucesos y aplicamos la Regla de Laplace:

$$A=\left\{\begin{array}{cccc} & & & 2-5\\ & & 3-4 & 3-5\\ & 4-3 & & 4-5\\ 5-2 & 5-3 & 5-4 & \end{array}\right\}\rightarrow\ \mathrm{p}(A)=\frac{9}{20}$$

$$B=\left\{\begin{array}{ccccc} & 1-2 & 1-3 & 1-4 & 1-5\\ 3-1 & 3-2 & & 3-4 & 3-5\\ 5-1 & 5-2 & 5-3 & 5-4 & \end{array}\right\}\rightarrow\ \mathrm{p}\,(B)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

c) Obtenemos $A\cap B=\{3-4\,,3-5\,,5-2\,,5-3\,,5-4\}$ y comparamos:

$$\left.\begin{array}{r}\mathrm{p}(A\cap B)=\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}\\ \mathrm{p}(A)\cdot\mathrm{p}(B)=\dfrac{9}{20}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{100}\end{array}\right\}\rightarrow \mathrm{p}(A\cap B)\neq \mathrm{p}(A)\cdot\mathrm{p}(B)\rightarrow\ \text{Son dependientes}$$

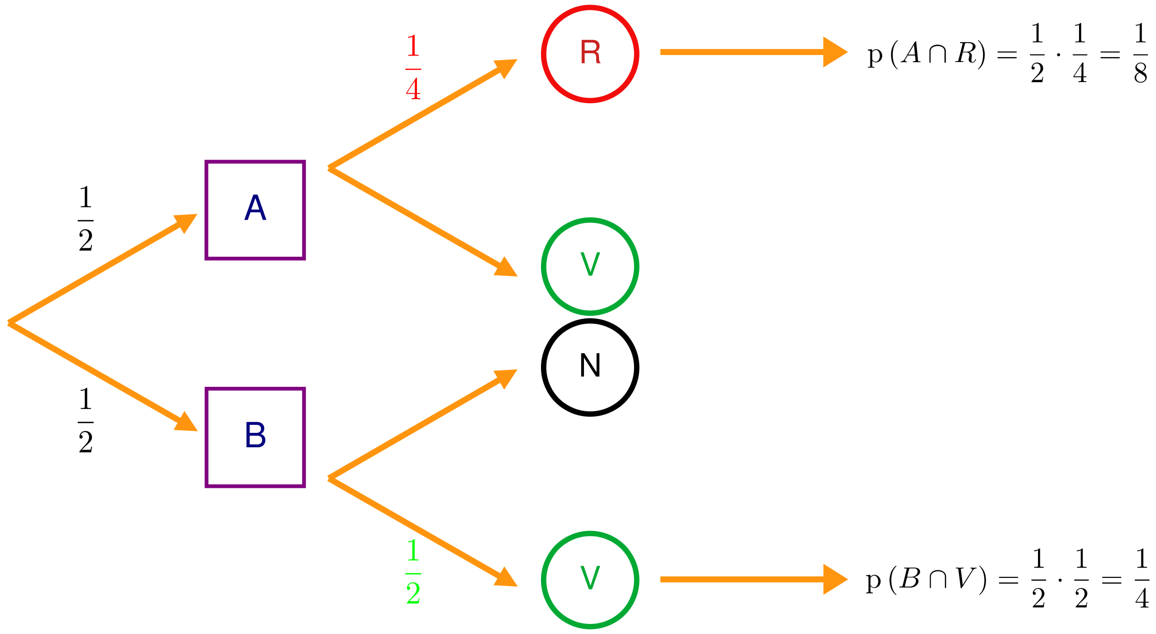
d) Se trata de una probabilidad condicionada:

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{5/20}{9/20} = \frac{5}{9}$$

Nota: podríamos haber obtenido en (c) esta probabilidad y observar que no coincide con $p(B)$ (obtenida antes), lo que se demuestra que son dependientes. Así se responde a la vez a los dos últimos interrogantes.

EJERCICIO 8:

Aquí un diagrama de árbol que muestra el desarrollo de la experiencia, donde están señalados todos los posibles caminos, las probabilidades de elegir cada urna, la probabilidad de "sacar bola roja de la urna A", de "sacar bola verde de la urna B":

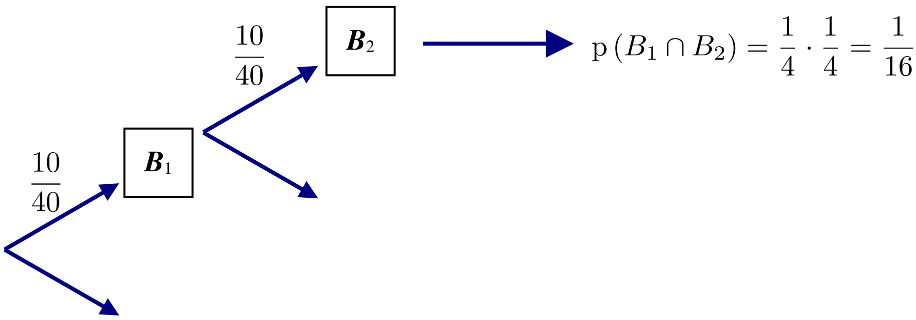


Y se han calculado las probabilidades de los caminos (intersecciones) "elegir urna A y sacar bola roja" y "elegir la urna B y sacar bola verde". Formulísticamente:

$$p(A \cap R) = p(A) \cdot p(R/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \text{ y } p(B \cap V) = p(B) \cdot p(V/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

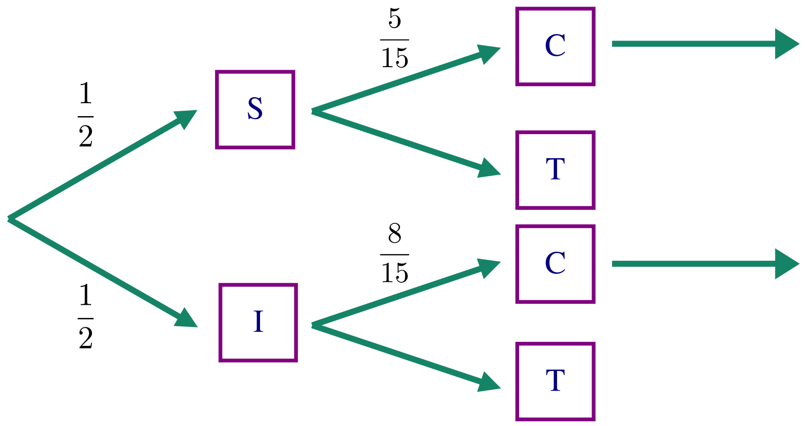
EJERCICIO 9:

Una baraja española consta de 40 cartas, donde encontramos 10 de cada uno de los palos (bastos, copas, espadas y oros). Si sacamos dos cartas, con devolución, las probabilidades al sacar la segunda son idénticas a las que nos encontramos al sacar la primera. Así:



EJERCICIO 10:

Sea I = “elegir cajón inferior”, S = “elegir cajón superior”, C = “sacar cuchara” y T = “sacar tenedor”:



$$p(S \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{15} = \frac{1}{6}$$

$$p(I \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15} = \frac{4}{15}$$

a) La probabilidad de sacar finalmente una cuchara es una probabilidad total:

$$p(C) = \frac{1}{6} + \frac{4}{15} = \frac{13}{30}$$

b) Lo solicitado es el cálculo de una probabilidad condicionada a posteriori (pues conociendo el resultado final de la experiencia se pregunta por algo que ocurrió en ella en el pasado, durante su ejecución):

$$p(S/C) = \frac{p(S \cap C)}{p(C)} = \frac{1/6}{13/0} = \frac{5}{13}$$

EJERCICIO 11:

P = “coger una bola de pádel” , *T* = “coger una bola de tenis” , *N* = “coger una bola nueva”

De Derecho hay 420 – 180 – 72 = 168, y que votan No la tercera parte de Empresariales (60 : 3 = 20), 16 de Relaciones y las dos terceras partes de Derecho (168 · 2 : 3 = 112).

Organicemos todas las cantidades en una tabla:

	E	R	D	
S	160	56	56	272
N	20	16	112	148
	180	72	168	420

a) $p(\text{"sea de Relaciones y vote Sí"}) = p(R \cap S) = \frac{56}{420} = \frac{2}{15}$

b) $p(\text{"votar Sí"}) = p(S) = \frac{272}{420} = \frac{68}{105}$

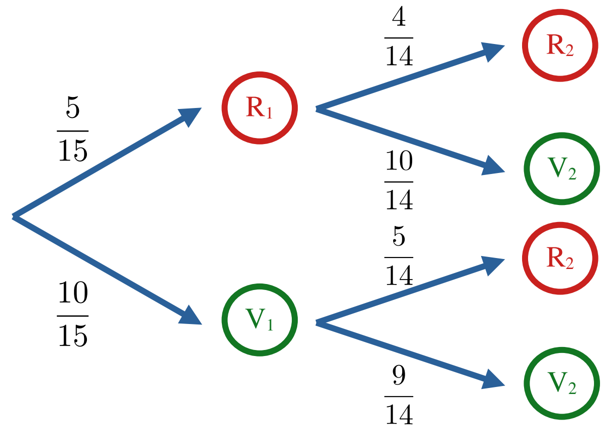
c) Observemos que se trata de la probabilidad condicionada “ser de Relaciones Laborales sabiendo que ha votado No”. Observemos el método directo con Laplace sobre los votantes de No y la fórmula :

$$p(R/N) = \frac{\text{"votantes de No que son de Relaciones"}}{\text{"votantes de No"}} = \frac{16}{148} = \frac{4}{37}$$

$$p(R/N) = \frac{p(R \cap N)}{p(N)} = \frac{16/420}{148/420} = \frac{4}{37}$$

EJERCICIO 12:

Organicemos todo en un diagrama de árbol, observando que la 2ª extracción es dependiente de la 1ª:



$$\mathrm{p}\left(R_1 \cap R_2\right) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$$

$$\mathrm{p}\left(R_1 \cap V_2\right) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{5}{21}$$

$$\mathrm{p}\left(V_1 \cap R_2\right) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{5}{21}$$

$$\mathrm{p}\left(V_1 \cap V_2\right) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{9}{21}$$

a) La probabilidad de que “ambas sean del mismo color” es una probabilidad total:

$$\mathrm{p}\left(\text{"mismo color"}\right) = \mathrm{p}\left(R_1 \cap R_2\right) + \mathrm{p}\left(V_1 \cap V_2\right) = \frac{4}{21} + \frac{9}{21} = \frac{13}{21}$$

b) También la probabilidad de que “la segunda sea roja” vamos a calcularla como una probabilidad total:

$$\mathrm{p}\left(R_2\right) = \mathrm{p}\left(R_1 \cap R_2\right) + \mathrm{p}\left(V_1 \cap R_2\right) = \frac{4}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

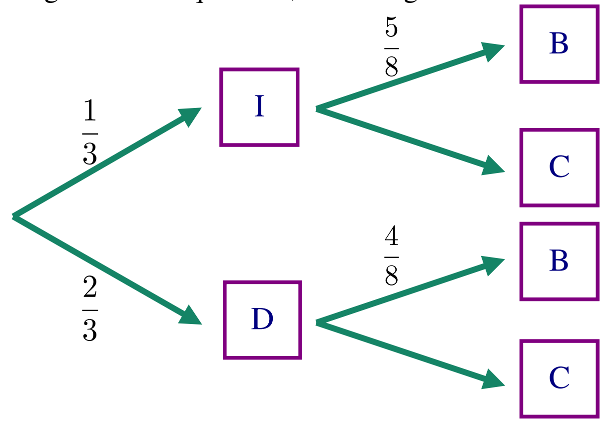
c) Lo solicitado es el cálculo de una probabilidad condicionada a posteriori:

$$\mathrm{p}\left(V_1/V_2\right) = \frac{\mathrm{p}\left(V_1 \cap V_2\right)}{\mathrm{p}\left(V_2\right)} = \frac{9/21}{4/7} = \frac{3}{4}$$

Observemos que $\mathrm{p}\left(V_2\right) = \mathrm{p}\left(\overline{R}_2\right) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

EJERCICIO 13:

I = “elegir mesita izquierda”, D = “elegir mesita derecha”, B = “sacar braguitas” , C = “sacar calzoncillos”



$$\mathrm{p}\left(I \cap B\right) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$$

$$\mathrm{p}\left(B\right) = \frac{5}{24} + \frac{4}{24} = \frac{9}{24}$$

$$\mathrm{p}\left(D \cap B\right) = \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{24}$$

Tenemos las probabilidades condicionadas a posteriori:

$$\mathrm{p}\left(I/B\right) = \frac{\mathrm{p}\left(I \cap B\right)}{\mathrm{p}\left(B\right)} = \frac{5/24}{9/24} = \frac{5}{9} \quad \rightarrow \quad \mathrm{p}\left(D/B\right) = \frac{4}{9}$$

Concluimos que es más probable que las haya cogido de la mesita izquierda: ($5/9 : 4/9 = 1.25$ → un 25% más probable).