COMBINATORIA

Contenidos

1. ¿Sabemos contar?
2. Variaciones y Permutaciones.
3. Combinaciones.
4. Números combinatorios.
5. Propiedades de los números combinatorios.
6. Binomio de Newton.

Tiempo estimado

12 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Realizar recuentos de forma planificada, dominando la técnica del producto y de los diagramas de árbol.
2. Reconocer los principales tipos de problemas combinatorios.
3. Utilizar correctamente las fórmulas que permiten calcular variaciones, permutaciones y combinaciones.
4. Manejar con soltura los números combinatorios.
5. Ser capaz de aplicar los resultados de la combinatoria a situaciones de la "vida real".

1. ¿Sabemos contar?

❑ Contar números consecutivos

¿Estamos seguros de que sabemos contar? Veamos una lista de números enteros consecutivos:

$$L = \{28, 29, \ldots, 605, 606\}$$

¿Cuántos números hay?

Podemos hacer lo siguiente

- Completar la lista:

$$\underbrace{1, 2, \ldots, 26, 27}, 28, \ldots, 606$$

Hay 606–27 $= 579$ números.

- Restar el menor de la lista, que es 28, a todos:

$$0, \underbrace{1, 2, \ldots, 577, 578}$$

Hay $578 + 1 = 579$ números.

Utilizando cualquiera de estas dos estrategias, es fácil demostrar que:

> Dados dos enteros $m > n$, en el conjunto de números enteros
>
> $$A = \{n, \ldots m\}$$
>
> hay $m–n + 1$ números.

Intenta tú contar cuántos números hay en la lista

L = { –35, –34, ... , 67, 68 }

siguiendo estos métodos:

- Separando negativos, cero y positivos.
- Restando el menor de la lista a cada uno.

Es claro que esto no puede ser más que el punto de partida. Pero nos permite contar también otras “series”. Observa los ejemplos y fíjate bien en las técnicas que se utilizan.

☞ Ejemplo: ¿Cuántos múltiplos de 3 hay entre 20 y 100?

Localizamos, ante todo, el primero y el último: $21 = 3 \cdot 7$ y $99 = 3 \cdot 33$.

$$\left.\begin{array}{lcc} 21 = 3 \cdot 7 & \rightarrow & 7 \\ 24 = 3 \cdot 8 & \rightarrow & 8 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ 99 = 3 \cdot 33 & \rightarrow & 33 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Hay } 33 - 7 + 1 = 27 \text{ múltiplos}$$

☞ Ejemplo: ¿Cuántos cuadrados entre los números enteros 20 y 220?

Localizamos el primeros y el último: $25 = 5^2$ y $196 = 14^2$.

$$\left.\begin{array}{lcc} 25 = 5^2 & \rightarrow & 5 \\ 36 = 6 \cdot 2 & \rightarrow & 6 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ 196 = 14^2 & \rightarrow & 14 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Hay } 14 - 5 + 1 = 10 \text{ cuadrados}$$

❑ Multiplicar.

¿Estamos seguros de que sabemos qué es el producto de dos números naturales? Si es así, entonces podemos responder a la siguiente cuestión:

☞ Juan tiene cinco pantalones y cuatro camisetas. ¿De cuántas formas distintas puede vestirse?

La respuesta es fácil: de $5 \cdot 4 = 20$ maneras distintas (hay cinco pantalones, y por cada pantalón puede escoger cuatro camisetas).

Este esquema es muy utilizado:

$$\underbrace{\text{Pantalón}}_{5}\underbrace{\text{Blusa}}_{4} \rightarrow \text{Hay } 5 \cdot 4 \text{ posibilidades}$$

Veamos otro muy semejante:

☞ En un restaurante el menú del día permite elegir entre tras primeros platos, cuatro segundos y cinco postres. ¿Cuántas elecciones diferentes permite escoger?

La respuesta es fácil: 3·4·5 elecciones distintas.

$$\underbrace{\text{Plato 1}}_{3}\underbrace{\text{Plato 2}}_{4}\underbrace{\text{Plato 3}}_{5} \rightarrow \text{Hay } 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ posibilidades}$$

☞ <u>Ejemplo</u>: Vamos a ver cuántas quinielas diferentes pueden rellenarse (incluyendo el pleno al 15):

Observemos que una quiniela es una lista ordenada con 15 posiciones, de modo que en cada una de ellas puedo colocar tres elementos (I, X, 2):

$$\underbrace{\text{Partido 1}}_{3}\underbrace{\text{Partido 2}}_{3}\cdots\underbrace{\text{Partido 15}}_{3} \rightarrow \text{Hay } 3 \cdots 3 = 3^{15} \text{ posibilidades}$$

Generalicemos:

Dados los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ con $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos, respectivamente, al elegir un elemento de cada uno de ellos las tenemos $m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$

posibilidades de elección.

❑ Esquemas de árbol.

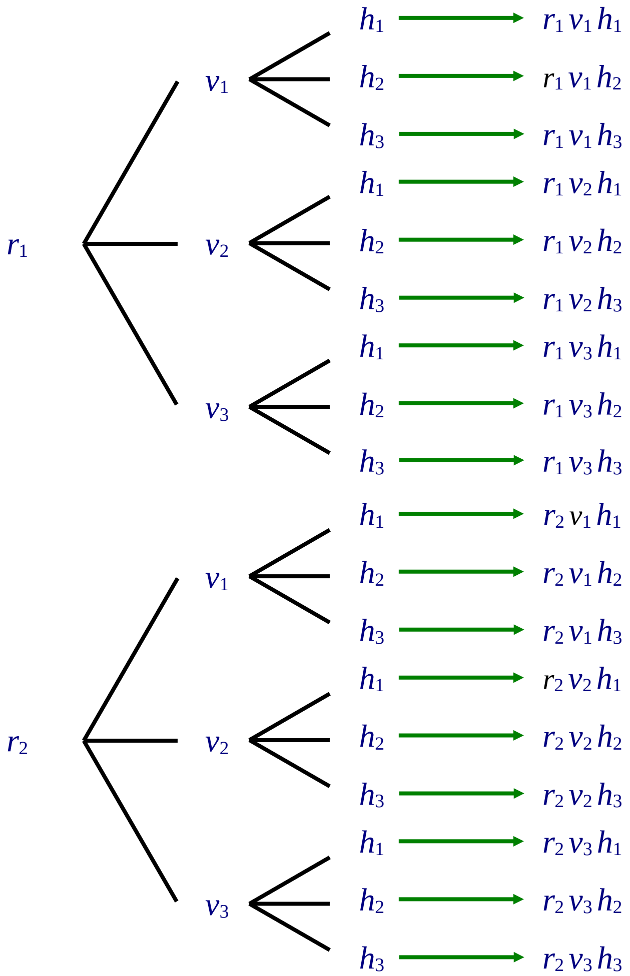
Hay una forma gráfica de ilustrar la regla del producto que nos permite contar todas las posibilidades y escribirlas de forma lógica y ordenada.

☞ Ejemplo: Del tronco de un árbol salen dos ramas. De cada rama tres varas y de cada una de éstas brotan tres hojas. ¿Cuántas hojas tiene en total el árbol?

Es claro que la solución es una simple multiplicación:

$$\underbrace{\text{Ramas}}_{2}\underbrace{\text{Varas}}_{3}\underbrace{\text{Hojas}}_{3} \to \text{Hay } 2\cdot 3\cdot 3 = 18 \text{ hojas}$$

Llamemos r_1 y r_2 a las ramas, v_1, v_2, v_3 a las varas y h_1, h_2, h_3 a cada una de las hojas que salen de las varas. Esquemáticamente:



☞ Ejemplo: la Asociación de Alumnos de un Instituto ha de elegir un Presidente, un Secretario y un Tesorero. Se presentan cuatro candidatos: ¿cuántas posibles juntas pueden formarse?

Es claro:

$$\underbrace{\text{Presidente}}_{4}\underbrace{\text{Secretario}}_{3}\underbrace{\text{Tesorero}}_{2} \to \text{Hay } 4\cdot 3\cdot 2 = 24 \text{ posibilidades}$$

Realiza tú un esquema de árbol que muestre todas las posibilidades.

No siempre es preciso desarrollar todo el árbol (ni posible). A veces basta con esbozarlo.

2. Variaciones y Permutaciones.

Variaciones con repetición.

Llamamos variaciones con repetición de n elementos, tomados de k en k, a las ordenaciones que podemos formar con k elementos –distintos o repetidos– tomados de entre ellos.

Al número de ellas se le designa por $\mathrm{VR}_{n,k}$

En las variaciones con repetición:
- Importa el orden de colocación.
- Pueden repetirse los elementos.

Observemos que vamos a formar sucesiones ordenadas:

$$\underbrace{\text{Lugar 1}}\,\underbrace{\text{Lugar 2}}\cdots\underbrace{\text{Lugar } k}$$

En el primer lugar podemos colocar cualquiera de los n elementos. En el segundo también, ya que puede repetirse el que se colocó el primero. Es claro que en cualquier lugar podemos colocar n elementos:

$$\underbrace{\text{Lugar 1}}_{n}\,\underbrace{\text{Lugar 2}}_{n}\cdots\underbrace{\text{Lugar } k}_{n}$$

Por la regla del producto, hay $n \overset{n \text{ veces}}{\cdots} n = n^k$ posibilidades diferentes.

Tenemos así:

El número de variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k viene dado por:

$$\mathrm{VR}_{n,k} = n^k$$

Forma con un diagrama de árbol las variaciones con repetición de

{ a , b , c }

y comprueba que hay $\mathrm{VR}_{3,2}$

☞ Ejemplo: Volvamos a calcular cuántas quinielas pueden rellenarse (incluyendo el pleno al 15): formamos las variaciones con repetición de tres elementos (I, X, 2) tomados de 15 en 15 (15 partidos). Hay

$$\mathrm{VR}_{3,15} = 3^{15}$$

☞ Ejemplo: ¿cuántos números de tres cifras podremos formar con los dígitos 1, 3, 5 y 7?

Disponemos de 4 cifras (1, 3, 5, 7) y henos de agruparlas de tres en tres. Pueden repetirse y es claro que el orden de elección es fundamental (135 es distinto de 531). Hay:

$$\mathrm{VR}_{4,3} = 4^3 = 64 \text{ números}$$

Variaciones ordinarias.

Llamamos variaciones de n elementos, tomados de k en k, a las ordenaciones que podemos formar con k elementos distintos tomados de entre ellos.

Al número de ellas se le designa por $\mathrm{V}_{n,k}$

En las variaciones ordinarias:
- Importa el orden de colocación.
- No pueden repetirse los elementos.

Observemos que vamos a formar sucesiones ordenadas:

$$\underbrace{\text{Lugar 1}}\,\underbrace{\text{Lugar 2}}\cdots\underbrace{\text{Lugar } k}$$

En lugar 1º podemos colocar cualquiera de los n elementos. En el 2º pueden colocarse $n-1$, ya que al no poder repetirse el colocado en primer lugar disponemos de uno menos. En cada lugar podremos colocar uno menos que en el anterior. En último lugar podremos elegir de entre los $n-k+1$ restantes.

Por la regla del producto, hay $n\cdot(n-1)\overset{n\text{ factores}}{\cdots}(n-k+1)$ posibilidades.

Tenemos así:

El número de variaciones de n elementos tomados de k en k es:

$$\mathrm{V}_{n,k}=n\cdot(n-1)\overset{n\text{ factores}}{\cdots}(n-k+1)$$

En las calculadoras aparece Vn,r como nPr.

Intenta calcular con la máquina $V_{6,2}$

☞ Ejemplo: se presentan cinco escritores, con una novela cada uno, a un concurso literario en el que se concederán dos premios. ¿Cuántas posibilidades diferentes hay de repartir esos dos premios?

Con cinco personas vamos a formar grupos de dos (ganador – finalista), son ordenados (no es lo mismo ser ganador que finalista) y no pueden repetirse sus "elementos" (un escritor no puede ser premiado como ganador y finalista a la vez). Hay:

$$\mathrm{V}_{5,2}=5\cdot 4=20\text{ posibilidades}$$

(Hazlo tú con el método directo y forma el diagrama de árbol)

Forma con un diagrama de árbol las variaciones sin repetición de

{ a, b, c }

y comprueba que hay $V_{3,2}$

☞ Ejemplo: ¿cuántos números de tres cifras distintas podremos formar con los dígitos 1, 3, 5 y 7?

Observemos que disponemos de 4 cifras (1, 3, 5, 7) y henos de agruparlas de tres en tres. No pueden repetirse y es claro que el orden de elección es fundamental (135 es distinto de 531). Hay:

$$\mathrm{V}_{4,3}=4\cdot 3\cdot 2=24\text{ números}$$

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $\mathrm{V}_{x,2}=20$

$$\mathrm{V}_{x,2}=20\rightarrow x\cdot(x-1)=20\rightarrow x^2-x-20=0\rightarrow \left|\begin{array}{l} x=5\\ x=-4\text{ NO}\end{array}\right.$$

❑ Permutaciones.

Llamamos permutaciones de n elementos a las reordenaciones que podemos formar con ellos. Al número de ellas se le designa por P_n

En las permutaciones:

- Importa el orden de colocación.
- No pueden repetirse los elementos.
- Se trata de reordenaciones (n elementos reubicados en n posiciones)

Es claro que las permutaciones de n elementos no son más que las variaciones de esos n objetos tomados de n en n. Tenemos así que es $\mathrm{P}_n=\mathrm{V}_{n,n}$. De donde deducimos:

El número de permutaciones de n objetos es:

$$\mathrm{P}_n=n\cdot(n-1)\cdots 1$$

Ese producto se denomina factorial de n, y se designa por n !

Obtén con tu calculadora 7!

☞ Ejemplo: ¿de cuántas maneras diferentes pueden sentarse cinco personas en un banco?

Tenemos que contar cuántas reordenaciones podemos hacer de cinco personas (es claro que no puede haber repetición y que el orden es esencial). Se trata de las permutaciones de esas cinco personas. Hay

$$P_5=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120\text{ maneras}$$

☞ Ejemplo: En una carrera intervienen 6 atletas. ¿De cuántas formas pueden quedar clasificados?

Son permutaciones de 6 "elementos": pueden clasificarse de

$$P_6=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120\text{ maneras}$$

Forma con un diagrama de árbol las permutaciones de

{ a, b, c }

y comprueba que hay P_3.

3. Combinaciones.

Número de subconjuntos.

Hasta ahora hemos estudiado siempre la formación de series o listas ordenadas. Pero hay multitud de situaciones en que se forman agrupaciones en las que el orden no debe tenerse en cuenta; es decir, esos grupos sólo se diferencian por los elementos que los forman y no por la forma en que estén enumerados.

Por ejemplo, si de un examen de 10 preguntas he de contestar a 8, no importa el orden en que las elija: dos elecciones se distinguen sólo por las cuestiones que la forman.

Vamos a analizar la cuestión del cálculo con un par de ejemplos:

☞ Ejemplo 1: vamos a preparar un batido de frutas de 3 sabores, teniendo 4 frutas para elegir. ¿Cuántos batidos diferentes podremos elaborar?

Designemos por A, B, C, D a las frutas. Los batidos que podré formar son:

{A, B, C} , {A, B, D} , {A, C, D} , {B, C, D}

Busquemos un método que nos permita contar sin tener que escribir todas las posibilidades: en el margen podemos observar que si permutamos en cada uno de los batidos los tres sabores obtenemos las variaciones, sin repetición, de las cuatro frutas tomadas de 3 en 3.

$$\{A,B,C\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ABC \\ ACB \\ BAC \\ CAB \end{array} \right.$$

$$\{A,C,D\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ACD \\ ADC \\ CAD \\ DCA \end{array} \right.$$

$$\{A,B,D\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ABD \\ ADB \\ BAD \\ DAB \end{array} \right.$$

$$\{B,C,D\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} BCD \\ BDC \\ CBD \\ DCB \end{array} \right.$$

Si designamos por N al número de las diferentes agrupaciones de frutas que podemos hacer sin tener en cuenta el orden:

$$N \cdot P_3 = V_{4,3} \rightarrow N = \frac{V_{4,3}}{P_3}$$

realizando los cálculos obtenemos, evidentemente, $N = 4$.

☞ Ejemplo 2: De los 5 temas que componen el temario de unas oposiciones voy a prepararme 4. ¿De cuántas formas distintas puede hacerse la elección?

Designemos por *a*, *b*, *c*, *d*, *e* a los temas. Las diferentes elecciones son:

{*a*, *b*, *c*, *d*} , {*a*, *b*, *c*, *e*} , {*a*, *b*, *d*, *e*} , {*a*, *c*, *d*, *e*} , {*b*, *c*, *d*, *e*}

Busquemos un método que nos permita contar sin tener que escribir todas las posibilidades: observemos que si permutamos en cada uno de los grupos obtenemos las variaciones sin repetición de los 5 temas tomados de 4 en 4:

$$N \cdot P_4 = V_{5,4} \rightarrow N = \frac{V_{5,4}}{P_4}$$

realizando los cálculos obtenemos, evidentemente, $N = 5$.

Combinaciones.

Pasemos a generalizar estas cuestiones:

> Llamamos combinaciones de n elementos, tomados de k en k, a los grupos que podemos formar con k elementos distintos tomados de entre ellos.
>
> Al número de ellas se le designa por $\mathrm{C}_{n,k}$

> En las combinaciones:
> - No importa el orden.
> - No pueden repetirse los elementos.
>
> Se trata de formar grupos, conjuntos, agrupaciones.

Tal y como se ha hecho en los dos ejemplos anteriores, deducimos que es:

> El número de combinaciones de n elementos tomados de k en k es:
> $$\mathrm{C}_{n,k} = \frac{\mathrm{V}_{n,k}}{\mathrm{P}_k}$$

☞ Ejemplo: Consideremos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. ¿Cuántos subconjuntos distintos de tres elementos pueden formarse?

Pues las combinaciones de 5 objetos tomados de 3 en 3:

$$\mathrm{C}_{5,3} = \frac{\mathrm{V}_{5,3}}{\mathrm{P}_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

☞ Ejemplo: De una urna con 12 bolas sacamos 4 al azar. ¿Cuántas extracciones distintas pueden realizarse?

Son las combinaciones de 12 objetos tomados de 4 en 4:

$$\mathrm{C}_{12,4} = \frac{\mathrm{V}_{12,4}}{\mathrm{P}_4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$$

El número de combinaciones puede obtenerse con la calculadora mediante nCr.

Obtén con la calculadora C5,3 y C12,4

☞ Ejemplo: Estamos ante dos urnas, de modo que la primera contiene 5 bolas rojas y la segunda 6 bolas verdes. Sacaremos cinco bolas: dos de la primera y tres de la segunda. ¿De cuántas formas distintas puede realizarse al extracción?

$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{U_1}\underbrace{\binom{6}{3}}_{U_2} \xrightarrow{Producto} \text{Hay } 10 \cdot 20 = 200 \text{ posibilidades}$$

4. Números combinatorios.

❑ Factorial de un número.

En el estudio de las permutaciones y en otras ramas de las Matemáticas aparece con frecuencia el producto

$$n \cdot (n-1) \cdots 1$$

Es por ello que tiene su nombre y su símbolo propio:

> Dado un número entero $n \geq 1$, se llama factorial de n al producto
> $$n! = n \cdot (n-1) \cdots 1$$

Aunque parezca extraño el factorial de cero se define de la siguiente forma:

> El factorial de 0 es 1: $0! = 1$

Esa definición no es más que un convenio, no tiene ningún sentido especial.

Se hace así para que determinadas fórmulas también sean válidas con el número cero.

❑ Variaciones y factoriales.

Las fórmulas de las variaciones ordinarias –o sin repetición–, pueden expresarse mediante los números factoriales. Fíjate en estos ejemplos:

$$\mathrm{V}_{5,2} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!}$$

$$\mathrm{V}_{7,2} = 7 \cdot 6 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{5!}$$

En general:

La variaciones de n elementos tomados de k en k vienen dadas por:

$$\mathrm{V}_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

❑ Combinaciones y factoriales.

El número de combinaciones también puede expresarse a través de los números factoriales, deduciéndose de la fórmula anterior al ser $\mathrm{C}_{n,k} = \mathrm{V}_{n,k} : \mathrm{P}_k$:

La combinaciones de n elementos tomados de k en k vienen dadas por:

$$\mathrm{C}_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Así, por ejemplo:

$$\mathrm{C}_{6,2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!}$$

❑ Números combinatorios.

Esa expresión que hemos obtenido al expresar el número de combinaciones mediante factoriales aparece en muchas otras situaciones, aparentemente inconexas. Tiene un nombre propio: número combinatorio.

Dados dos enteros $n \geq k \geq 0$ se llama número combinatorio "n sobre k" a:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Recuerda que puede usarse la calculadora para obtener los números combinatorios.

En la máquina "n sobre r" es nCr.

Por ejemplo, el número combinatorio 5 sobre 2 es $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 5$

5. Propiedades de los números combinatorios.

❑ Casos especiales.

Con el convenio $0! = 1$ tienen sentido los siguientes números combinatorios:

Para cualquier entero $n \geq 0$ es:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Por ejemplo, tenemos que $\binom{5}{0} = \binom{8}{8} = 1$

❑ Complementariedad.

Dados dos números enteros $n \geq k \geq 0$ se verifica:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

La propiedad que viene del hecho de expresar el número de combinaciones. Por ejemplo: dado un conjunto de 7 elementos, el número de subconjuntos de 4 elementos que podamos formar es el mismo que el que podemos formar con 3 elementos (pues por cada 4 elegidos dejamos sin escoger 7 – 4 = 3) y viceversa.

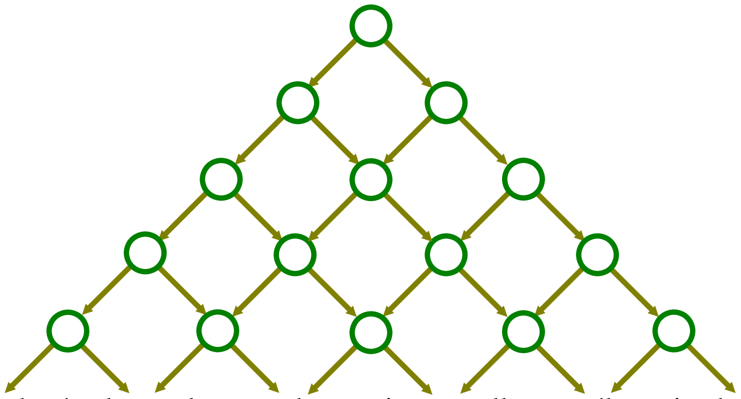
☞ Demostración: la haremos en un momento; es un sencillo cálculo

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

❑ El triángulo de Tartaglia

Tartaglia fue un matemático italiano que vivió en el siglo XVI. El triángulo numérico que lleva su nombre destaca ciertas propiedades de los números combinatorios, y que aparece en problemas de bifurcación.

Supongamos que partiendo de un punto, nuestro camino se va dividendo en dos. Señalaremos cada uno de los cruces con un círculo:



En cada círculo señalaremos dos caminos que llevan a él, partiendo desde el punto superior, punto de salida.

Para hacerlo tengamos en cuenta:

1. Colocaremos 1 en la salida.
2. Completaremos de arriba hacia abajo.
3. En los puntos de los extremos tendremos que sólo hay un camino que lleva hasta ellos –siguiendo la línea recta–
4. En los demás puntos, los caminos que llevan a él son la suma de los dos inmediatamente anteriores que confluyen hasta dicho lugar –¿sí o no?–

Se deduce una propiedad más: halla la suma de todos los números de cada fila y observa de qué potencia se trata.

Ese triángulo coincide con el que se obtiene al colocar ordenadamente los números combinatorios. ¿Sorprendente?

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

5. Binomio de Newton.

Los números combinatorios aparecen hasta en la sopa. Por ejemplo, veamos una fórmula conocida como binomio de Newton.

Vamos a calcular las sucesivas potencias del binomio $a+b$:

$$\begin{array}{lcc} (a+b)^0 & = & 1 \\ (a+b)^1 & = & a+b \\ (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a+b)^4 & = & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{array}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Podemos deducir un método general de cálculo:

1. El desarrollo de $(a+b)^n$ tiene $n+1$ sumandos.
2. Los coeficientes de cada uno de esos términos son los que aparecen en la fila *n*–ésima del triángulo de Tartaglia.
3. La suma de los exponentes de a y de b siempre es n. Los de a van disminuyendo, uno a uno, desde n hasta 0, los de b van aumentando, uno a uno, desde 0 hasta n.

Tenemos así que la potencia quinta del binomio es:

$$(a+b)^5=\binom{5}{0}a^5+\binom{5}{1}a^4b+\binom{5}{2}a^3b^2+\binom{5}{3}a^2b^3+\binom{5}{4}ab^4+\binom{5}{5}ab^5$$

Observemos que en el desarrollo de $(a+b)^n$ tendremos que sumar los términos $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ para $k = 0, 1, \dots, n$. Eso se escribe así:

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}$$

☞ <u>Ejemplo</u>: Obtengamos el desarrollo de $(2x+3y)^4$:

$$\begin{aligned}(2x+3y)^4&=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(2x)^{4-k}(3y)^k\\&=16x^4+96x^3y+96x^2y^2+216xy^3+81y^4\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Juan va a vestirse para ir a correr, como hace cada día durante una hora. En el armario tiene 6 camisetas, 3 pantalones y 2 pares de deportivos. ¿De cuántas formas distintas puede vestirse?

[*Sol.* 36]

2. De cada una de las 10 ramas que tiene un árbol salen 12 brotes. Y en cada brote se aprecian 8 hojas. ¿Cuántas hojas tiene el árbol?

[*Sol.* 960]

3. Hay elecciones en una AMPA para elegir a su junta directiva, compuesta por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero. Se presentan 7 candidatos. ¿Cuántas directivas diferentes podrían llegar a formarse?

[*Sol.* 840]

4. Un grupo de cinco amigos recibe como regalo tres invitaciones a un evento deportivo. Deciden repartírselas a suerte. ¿Cuántos repartos distintos podrán hacerse?

[*Sol.* 10]

5. ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas podrán formarse con los dígitos 0 , 2, 5, 8 y 9?

[*Sol.* 96]

6. La bandera de un país está formada por tras franjas verticales de distinto color e idéntico ancho. ¿Cuántas banderas distintas se pueden formar usando los siete colores básicos del arco iris?

[*Sol.* 210]

7. Los 20 alumnos sortean cuáles podrán sentarse en los seis asientos de primera fila. ¿Cuántos posibilidades distintas hay?

[*Sol.* 27907200]

8. Resuelve: $\mathrm{V}_{x,4} = 20 \cdot \mathrm{V}_{x,2}$

[*Sol.* $x = 7$]

9. Resuelve: $\mathrm{VR}_{x,2} + 5\,\mathrm{VR}_{x-2,2} = 244$

[*Sol.* $x = 8$]

10. Estudia cuántos números de tres cifras pueden formarse con los dígitos 0, 2, 5, 7.

[*Sol.* 48]

11. Lanzamos tres dados, uno rojo, uno azul y otro verde, numerados del 1 al 6. ¿Cuántos resultados distintos podrán obtenerse?

[*Sol.* 120]

12. Usando los dos símbolos del alfabeto Morse (· y -), ¿cuántos caracteres diferentes podrán obtenerse con hasta 4 símbolos?

[*Sol.* 30]

13. Calcula cuántos capicúas de cinco cifras hay.

[*Sol.* 900]

14. La matrícula de una automóvil está compuesta por dos letras diferentes (elegidas de entre 26 del alfabeto) y tres cifras. ¿Cuántas distintas podrán formarse en este sistema?

[*Sol.* 650000]

15. Halla de cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en un banco.

[*Sol.* 40320]

16. Seis equipos de baloncesto participan en una liguilla. ¿Cuántas clasificaciones diferentes podrán obtenerse?

[*Sol.* 720]

17. Halla cuántas palabras podremos formar reordenando las letras que contiene el vocablo "murciélago". ¿Y si las letras "la" siempre están unidas y en ese mismo orden?

[*Sol.* 3628800] [*Sol.* 362880]

18. Calcula de cuántas maneras diferentes podrán sentarse siete personas en una mesa circular. (permutaciones circulares)

[*Sol.* 720]

19. Simplifica:

a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ b) $\dfrac{(m+4)!}{(m+2)!}$

20. Escribimos en orden alfabético todas las permutaciones de las letras A,B,C,D,E.

¿Cuál ocupa el lugar 75? ¿Qué lugar ocupa CDABE?

[*Sol.* DACBE] [*Sol.* 61]

21. Halla cuántos números de cinco cifras distintas podemos formar con los dígitos 1,2,3,4,5. Calcula la suma de todos

[*Sol.* 120] [*Sol.* 3 999 960]

22. Una barriada está compuesta de 5x5 bloques separados por calles paralelas y perpendiculares entre sí. Queremos ir desde una esquina hasta la esquina opuesta. ¿Cuántos caminos de longitud mínima podrán formarse?

[*Sol.* 252]*

23. Reordenando las letras de la palabra elefante, ¿cuántas palabras distintas podrán formarse?

[*Sol.* 6720]*

24. Averigua de cuántas formas distintas se pueden alinear 6 signos + y 4 signos -

[*Sol.* 210]*

25. Colocamos en fila 10 fichas de un juego de damas: siete negras y 3 blancas. ¿Cuántas ordenaciones diferentes podemos conseguir?

[*Sol.* 120]*

26. Necesitamos un grupo de 3 personas para realizar una encuesta. Tenemos 10 voluntarios. ¿Cuántos grupos diferentes podríamos formar?

[*Sol.* 120]

27. En el plano tenemos seis puntos, no encontrando nunca tres de ellos alineados. ¿Cuántos triángulos distintos podemos dibujar con vértices en ellos?

[*Sol.* 20]

28. Resuelve la ecuación $3\,\mathrm{C}_{x,3} - 5\,\mathrm{C}_{x,2} = 8\,\mathrm{C}_{x,1}$

[*Sol.* $x = 9$]

29. Calcula x sabiendo que es $\binom{20}{12} = \binom{20}{x}$

30. Simplifica $\binom{x+2}{x}$

31. Desarrolla $(2a+3b)^5$

32. De un total de cinco cirujanos y seis anestesistas se forma un equipo de dos cirujanos y tres anastesistas. ¿Cuántos distintos pueden formarse?

[*Sol.* 200]

33. Calcula el término independiente de $\left(3x^3 - \frac{2}{x}\right)^{20}$.

[*Sol.* $\binom{20}{15} \cdot 3^5 \cdot (-2)^{15}$]

34. Una urna contiene las siguientes bolas, idénticas con la excepción del color: 6 blancas, 5 rojas y 4 verdes. Sacamos tres bolas. ¿Cuántos posibilidades distintas hay? ¿Cuántas de ellas son del mismo color? ¿Cuántas hay con los tres colores?

[*Sol.* 455] [*Sol.* 34] [*Sol.* 120]