TEMA 7

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Contenidos

1. Experiencias aleatorias. Sucesos.
2. Idea intuitiva de probabilidad. Definición clásica.
3. Propiedades de una probabilidad.
4. Regla de Laplace.
5. Probabilidad condicionada. Dependencia de sucesos.
6. Experiencias compuestas.
7. Probabilidad total.
8. Fórmula de Bayes: Probabilidad a posteriori.

Tiempo estimado

12 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Conocer y manejar la terminología básica: suceso, clases de sucesos, representaciones de Venn, operaciones,...
2. Interpretar probabilidades y asignarlas a sucesos a través de la Regla de Laplace.
3. Conocer las propiedades elementales de la función de probabilidad.
4. Calcular probabilidades condicionadas y determinar si dos sucesos son independientes o no.
5. Saber calcular la probabilidad de sucesos compuestos usando diagramas de árbol, tablas de contingencia y el teorema de probabilidad total.
6. Comprender qué es el cálculo de una probabilidad a posteriori y efectuarlo con el Teorema de Bayes.

1.Experiencias aleatorias. Sucesos

❑ Experiencias aleatorias.

La Ciencia trata de encontrar las leyes por las que se rigen los fenómenos que observamos. Para establecerlas se realizan experiencias en las que dichos fenómenos se producen en unas mismas condiciones.

El poder de la Ciencia viene de su capacidad de predicción. Una encontrada una ley podemos "predecir el futuro": si repetimos la experiencia bajo ciertas condiciones podemos anticipar el resultado.

Por ejemplo: subamos a la azotea de un edificio en un día con ausencia de viento y abandonemos una piedra sobre el suelo. Podemos afirmar que la piedra caerá. Y además podemos señalar en qué lugar caerá –la vertical–. Incluso podemos calcular la velocidad con la que impactará contra el suelo.

En esta situación tenemos que el efecto está determinado por ciertas causas, las consecuencias ocurrirán necesariamente.

Frente a esta clase de fenómenos hay otros en los que no podemos prever cuál será el resultado. Por ejemplo:

- Desde una altura de un metro dejamos caer una moneda al suelo y obtenemos una cara. Si repetimos la experiencia: ¿qué obtendremos?
- De un mazo con una baraja española sacamos una carta, sin mirar. ¿Qué carta habremos extraído?
- En un bombo de lotería hay diez bolas idénticas, salvo en el hecho de que están numeradas del 1 al 10. Movemos el bombo y extraemos una de las bolas. Es claro que llevará necesariamente uno de esos diez números, pero es imposible predecir cuál será.

En estos casos, la totalidad de las circunstancias que influyen en le resultado escapa a nuestro conocimiento, el resultado es la consecuencia de la suma de una cantidad de factores que no podemos ni distinguir ni controlar. Decimos que el resultado es consecuencia del azar.

Y esas experiencias o fenómenos cuyo resultado se atribuye al azar se denominan aleatorios:

Se llama **experiencia aleatoria** a aquella en la que, bajo condiciones fijas, pueden ocurrir un número concreto de resultados, pero no es posible predecir cuál sucederá.

☞ Ejemplo: lanzamos dos dados sobre una mesa y deseamos averiguar cuál será la suma de las puntuaciones que se obtendrán: estamos ante un fenómeno aleatorio.

☞ Ejemplo: tenemos una urna con cinco bolas blancas y una verde. Sacamos, sin mirar, una de ellas al azar. Si nos preguntamos por el color que tendrá estamos ante una experiencia aleatoria.

El estudio de los fenómenos regidos por el "azar" y del cálculo de probabilidades comenzó en 1654.

Un aristócrata francés conocido como el "caballero de Mère", interesado por los juegos y las apuestas, preguntó al matemático Pascal por una aparente contradicción en un juego de dados.

El juego consistía en lanzar 24 veces un par de dados; y se trataba de apostar a favor o en contra de la aparición de por lo menos un "seis doble". Un razonamiento sencillo le llevaba a pensar que era ventajoso apostar a favor, pero su experiencia era le señalaba lo contrario.

El caballero escribió a Pascal comentándole éste y otros problemas. Esto motivó que se iniciara un intercambio de cartas entre Pascal y otro matemático, Fermat, en las que se formularon los fundamentos del Cálculo de Probabilidades.

Sería Laplace, en 1774 el que enunciaría la primera definición que se conoce del concepto de probabilidad. Y tras sus estudios, el interés por estas cuestiones decayó hasta nuestro siglo.

A principios de éste el matemático ruso Kolmogorov construyó la base de la teoría moderna.

En tiempos recientes ha tenido un auge espectacular, de la mano de la Estadística, usándose sus conclusiones en Sociología, Psicología e incluso en la Teoría Atómica o en Química.

☞ Ejemplo: Otro fenómeno aleatorio: del mazo de una baraja española extraemos una carta, y nos preguntamos: ¿qué carta saldrá? O también: ¿saldrá una figura?

En las experiencias aleatorias es imposible hallar reglas determinísticas, leyes que rijan la aparición de cada resultado. Pero eso no significa que el azar no esté gobernado por ninguna ley.

Aunque pueda parecer paradójico, el azar tiene sus propias leyes. Hay dos ramas de la Matemática que dedican a su estudio: el Cálculo de Probabilidades y la Estadística.

Para comenzar, vamos a estudiar experiencias aleatorias sencillas, como son el lanzamiento de monedas o la extracción de bolas contenidas en urnas.

❑ Espacio muestral. Sucesos.

Lo primero que debemos hacer al enfrentarnos al estudio de un fenómeno aleatorio es identificar el conjunto de todos los resultados posibles:

En una experiencia aleatoria se denomina **espacio muestral** –*E*– al conjunto de todos los posibles resultados.

☞ Ejemplo: si lanzamos un dado y observamos el número que se obtiene, el espacio muestral es

$$E=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

☞ Ejemplo: lanzamos una moneda dos veces y anotamos si sale cara o cruz. El espacio muestral puede expresarse de la siguiente forma:

$$E=\{CC, CX, XC, XX\}.$$

☞ Ejemplo: En una urna con cinco bolas rojas y una verde sacamos dos bolas, una a continuación de la otra y sin devolución, anotando el color. El espacio muestral podría expresarse así

$$E=\{RR, RV, VR\}.$$

Veremos más adelante que esta forma de expresarlo puede no ser una buena idea.

Podemos interesarnos no sólo por un resultado individual, sino por un conjunto de ellos. Veamos la terminología que se usa:

En una experiencia aleatoria se denomina:

- **Suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral *E*.
- **Suceso elemental** al formado por un único elemento de *E*.
- **Suceso imposible** – $\varnothing$ – al que no puede ocurrir y suceso seguro al propio *E*.

Diremos que un suceso se verifica o que ha ocurrido si el resultado es uno de sus elementos.

Observemos que los sucesos pueden definirse:

- Por comprensión: dando una propiedad característica que lo determina.
- Por extensión: enumerando cada uno de los elementos que lo componen. que el recinto de la izquierda es convexo, pero no es acotado.

☞ Ejemplo: Lanzamos un dado con seis caras numeradas del 1 al 6.

El espacio muestral es $E=\{1,2,3,4,5,6\}$

A = "sale par" es el suceso $A=\{2,4,6\}$

B = "sale impar" es el suceso $B=\{1,3,5\}$

C = "sale un cinco" es el suceso $C=\{5\}$

El suceso definido por "sale un siete" es imposible, es el suceso $\emptyset$.

El suceso definido por "sale un número del l al 6" es el suceso seguro. Es el propio espacio muestral *E*.

Observemos que los sucesos A y B no son elementales, pero que C sí lo es.

☞ Ejemplo: Lanzamos un dado dos veces, y anotamos el número obtenido en cada una de las ocasiones.

El espacio muestral es el conjunto de todos las parejas $x-y$ donde son *x* , *y* = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Los sucesos "la suma de los números es 14" o "el primer número es un 8" son sucesos imposibles. Son el suceso $\emptyset$.

Si *A* = "la suma es 3" → $A=\{1-2,2-1\}$

Si *B* = "el 1º es un 3" → $A=\{3-1,3-2,\ldots,3-6\}$

☞ Ejemplo: lanzamos una moneda dos veces y anotamos si sale cara o cruz.

El espacio muestral es $E=\{CC,CX,XC,XX\}$.

A = "obtener dos caras" es $A=\{CC\}$

B = "obtener dos cruces" es $B=\{XX\}$

C = "obtener una cruz" es $C=\{CX,XC\}$

D = "sale al menos una cruz" es $D=\{CX,XC,XX\}$

Observemos que los sucesos A y B son elementales, pero que C y D no lo son.

❑ Operaciones con sucesos.

Vamos a las definiciones:

Dados dos sucesos *A* y *B*, llamamos suceso

- **unión** $A\cup B$ al que acontece cuando ocurre al menos uno de los dos: es el suceso formado por todos los elementos de *A* o de *B*.
- **intersección** $A\cap B$ al que acontece cuando ocurren ambos sucesos: es, el suceso formado por los elementos comunes de *A* y de *B*.
- **diferencia** $A-B$ al que acontece cuando ocurre *A* y no *B*; esto es, es el formado por los elementos de *A* que no están en *B*.
- **contrario** de *A* al suceso $A^c=E-A$.

Diremos que *A* y *B* son incompatibles si $A\cap B=\emptyset$

☞ Ejemplo: sigamos con el ejemplo anterior, en el que lanzamos una moneda dos veces y anotamos si sale cara o cruz.

El suceso $A\cup B$ es el suceso "obtener el mismo resultado en ambos lanzamientos", esto es: $A\cup B=\{CC, XX\}$.

El suceso $A\cap B$ es el suceso imposible, pues no puede obtenerse simultáneamente dos caras y dos cruces; esto es: $A\cap B=\varnothing$.

Tenemos así que A y B son sucesos incompatibles.

El suceso $B\cup C$ es el suceso "obtener una o dos cruces"; esto es lo mismo que "obtener al menos una cruz". Por tanto: $B\cup C=D$.

El suceso $B\cap C$ es el suceso imposible, ya que no hay elementos en común.

El suceso contrario a D es "no obtener ninguna cruz"; esto es lo mismo que "obtener dos caras". Por tanto: $D^c=\{CC\}=A$

☞ Ejemplo: tomemos una baraja española y saquemos al azar una de sus cartas. Y sean

A = "sacar un bastos"

B = "sacar una figura"

C = "sacar un as"

$A\cap B$ es el suceso "sacar una figura y un bastos". Así:

$$A\cap B=\{sota\,de\,bastos\ ,\ caballo\,de\,bastos\ ,\ rey\,de\,bastos\}$$

$A\cup C$ es el suceso "sacar un as o un bastos". Está, pues formado por los 4 ases y los 10 bastos de la baraja: un total de 13 elementos.

$A\cap C$ es el suceso "sacar un as y un bastos". Así:

$$A\cap C=\{as\ de\ bastos\}$$

$A^c\cap C$ es el suceso "sacar un as y que no sea un bastos". Así:

$$A^c\cap C=\{as\,de\,oros\,,\,as\,de\,espadas\,,\,as\,de\,copas\}$$

Cerramos con dos propiedades que relacionan la unión, la intersección y el suceso contrario, que en ocasiones se usa en el cálculo de probabilidades:

Dados dos sucesos A y B de una exp. aleatoria, se tiene:

- el complementario de la unión es la intersección de los complementarios

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$

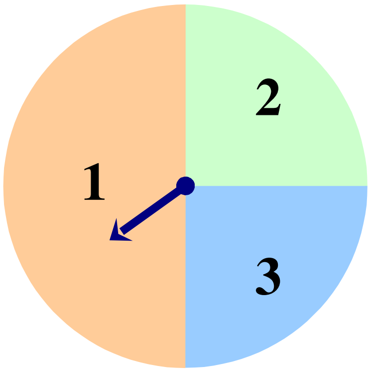
- el complementario de la intersección es unión de los complementarios:

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

Comprueba la propiedad con los sucesos de los ejemplos anteriores.

2.Noción clásica de probabilidad

Vamos a introducir el concepto de probabilidad a partir de un ejemplo concreto.



En una atracción de feria se trata de apostar en una ruleta, que vemos en el margen. Hay que girar la flecha y adivinar el número que señalará.

El espacio muestral es bien simple: $E=\{1,2,3\}$.

Sólo hay tres sucesos elementales:

S_1= "sale el 1" S_2 = "sale el 2" S_3= "sale el 3"

La probabilidad de un suceso es un número que trata de medir la verosimilitud de su ocurrencia.

Vamos a intentar asignarlo a través de estas cuestiones:

a) Si apostaras por la aparición de un número, ¿por cuál lo harías?
b) ¿Te parece que el 2 y el 3 tienen igual probabilidad de aparecer? ¿Y el 1 y el 2?
c) ¿Qué relación te parece que deben guardar las probabilidades de S_1 y de S_2? ¿Y qué relación deben guardar las de S_2 y S_3?
d) ¿Te parece adecuada la asignación de "probabilidades" siguiente?

$$S_1 \rightarrow 50\% \quad S_2 \rightarrow 25\% \quad S_3 \rightarrow 25\%$$

e) Se han realizado tres pruebas y se ha obtenido la serie 2, 3, 2. ¿Te parece extraño?
f) Se han realizado mil pruebas y se ha obtenido:

1 ha aparecido 3 veces

2 ha aparecido 167 veces

3 ha aparecido 830 veces.

¿Qué te parece ahora?

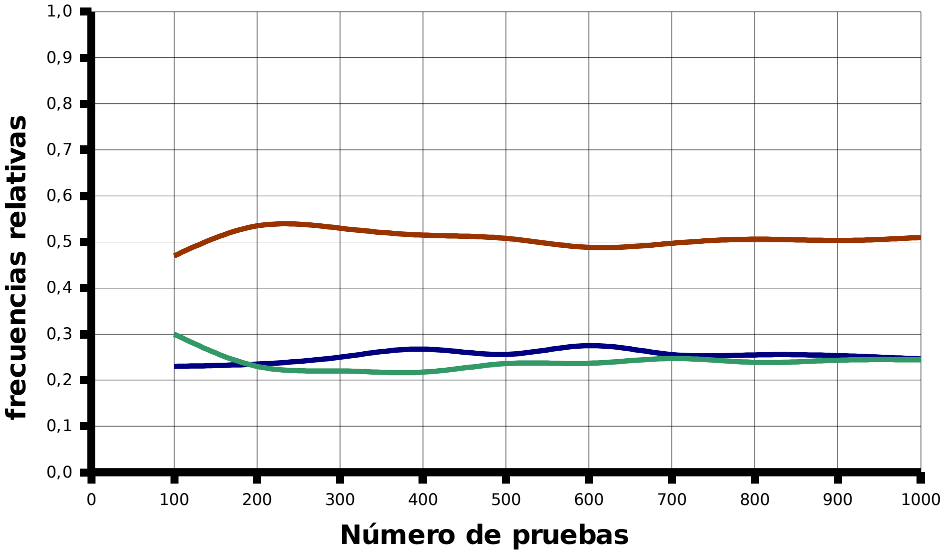
Debemos tener claro que dar la probabilidad de un suceso es asignarle un número que informa sobre la frecuencia con que se espera que se presente en una serie elevada de repeticiones de la esp. Aleatoria.

Para ello se introduce el siguiente concepto:

Si un exp. aleatorio se repite N veces y un suceso A se verifica en n_A de ellos, se llama **frecuencia relativa** de A al número

$$f(A)=\frac{n_A}{N}$$

Se ha simulado con ordenador mil veces la realización de la experiencia aleatoria anterior, sin trampas, obteniendo los siguientes resultados:



Observemos como las frecuencias relativas de cada uno de los sucesos se estabilizan hacia ciertos valores: esos valores son los que se denominan probabilidades.

En nuestro caso, es de esperar que en una "serie ilimitada":

S_1 aparezca en el 50% de las ocasiones $\rightarrow$ $p(S_1)=0'5=\frac{1}{2}$

S_2 aparezca en el 25% de las ocasiones $\rightarrow$ $p(S_2)=0'25=\frac{1}{4}$

S_3 aparezca en el 25% de las ocasiones $\rightarrow$ $p(S_3)=0'25=\frac{1}{4}$

Pasamos a la llamada "definición clásica" de la probabilidad:

> Consideremos un exp. aleatorio que se repite N veces.
>
> Cuando $N \rightarrow +\infty$ se tiene que la frecuencia relativa de cada suceso A "se estabiliza" en torno a cierto valor $p(A)$, que llamaremos **probabilidad** del suceso A.

☞ <u>Ejemplo</u>: he simulado con un ordenador el lanzamiento de una moneda 100.000 veces, y he obtenido:

$$fr(cara)=\frac{49.968}{100.000}=0'49968 \quad , \quad fr(cruz)=\frac{52.032}{100.000}=0'50032$$

Como vemos, corrobora la idea de asignar un 50% de posibilidades a cada uno de los sucesos elementales.

Para simular una experiencia así basta un ordenador personal que tenga instalada una hoja de cálculo.

La función que se usa es "random" o "generación de números aleatorios". ¡Anímate y hazlo!

3.Propiedades de la probabilidad

Cuando calculamos probabilidades en un experimento aleatorio, asignamos a cada suceso S un número, $p(S)$, que representa algo así como una frecuencia ideal.

Observemos que:

1. Como la frecuencia relativa es siempre un número no negativo, la probabilidad debe ser un número no negativo:

$$p(S) \geq 0$$

2. El suceso seguro –incluye todos los resultados posibles– aparece en cada realización del experimento, en el 100% de ellas, así:

$$p(S) = 1$$

3. Si A y B son sucesos incompatibles, la frecuencia de su unión es la suma de sus frecuencias, por ello debe ser

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

De estas propiedades básicas se deducen otras, como son las siguientes:

Si p es una probabilidad, se verifican las siguientes propiedades:

- Dado el suceso A, la probabilidad de su suceso contrario es:

$$p(A^c) = 1 - p(A)$$

- La probabilidad del suceso vacío es cero:

$$p(\varnothing) = 0$$

- Probabilidad de la unión de sucesos cualesquiera:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Si A y B no son incompatibles, tienen resultados elementales en común. Al sumar las probabilidades estamos considerando dos veces esos elementos comunes. Por ello hay que quitar la probabilidad de la intersección

- Demostración: veamos cómo deducirlas de las anteriores:

1. Al ser $A \cup A^c = E \quad \rightarrow \quad p(A \cup A^c) = 1$

   Como son incompatibles: $p(A) + p(A^c) = 1 \quad \rightarrow \quad p(A^c) = 1 - p(A)$

2. Como el suceso imposible es el complementario del suceso seguro:

$$p(\varnothing) = 1 - p(E) = 1 - 1 = 0$$

3. Es $A \cup B = A \cup (B - A)$

   y como son incompatibles: $p(A \cup B) = p(A) + p(B - A) \quad (*)$

   También B es $B = (A \cap B) \cup (B - A)$

   De aquí se deduce $p(B) = p(A \cap B) + p(B - A)$

   Despejando $p(B - A)$: $p(B - A) = p(B) - p(A \cap B) \quad (**)$.

   De (*) y (**) deducimos: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad \#$

4.Regla de Laplace.

Consideremos una exp. aleatoria con espacio muestral $E=\{x_1,\dots,x_n\}$, en el que los n sucesos elementales son equiprobables.

La probabilidad de cada uno de ellos será $p(x_i)=\frac{1}{n}$.

Si un suceso S consta de h resultados distintos, entonces su probabilidad será:

$$p(S)=\frac{1}{n}+\overset{h\,veces}{\dots}+\frac{1}{n}=\frac{h}{n}$$

Esta sencilla regla es conocida como "Regla de Laplace":

> La probabilidad de un suceso A en un exp. aleatorio es:
>
> $$p(A)=\frac{n^o\ de\ casos\ favorables\ a\ A}{n^o\ de\ casos\ posibles}$$
>
> supuesto que todos los casos posibles son equiprobables.

☞ Ejemplo: consideremos la exp. aleatoria consistente en lanzar un dado y anotar el número obtenido.

El espacio muestral es $E=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Si el dado no está trucado, todos los números tendrán la misma probabilidad de aparecer.

Vamos a calcular la probabilidad del suceso A = "sale un número par", usando la Regla de Laplace:

$$p(A)=\frac{números\ pares}{total\ de\ números}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

☞ Ejemplo: si lanzamos dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos sea 6?

Podemos ir a toda velocidad y señalar el espacio muestral: la suma puede ser cualquier número comprendido entre el 2 y el 12:

$$E=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

Podríamos pensar que el suceso A = "la suma es 6" tiene probabilidad

$$p(A)=\frac{1}{11}$$

Esta conclusión es errónea. ¿Dónde se ha cometido el error? Pues:

1. Sólo hay un "caso favorable" a que la suma sea 2: obtener en ambos dados un 1.
2. Hay varios "casos favorables" a que la suma sea 6: obtener en un dado 1 y en el otro 5, en un dado 2 y en otro 4, etc.

No hemos tenido en cuenta esto en nuestra actuación, y por ello hemos formado un espacio muestral en el que los sucesos elementales no son equiprobables.

Comencemos de nuevo: supongamos que lanzamos un dado y anotamos el número, a continuación hacemos lo mismo con el otro dado. El espacio muestral queda:

$$E=\begin{Bmatrix} 1-1 & \dots & 1-6 \\ \dots & \dots & \dots \\ 6-1 & \dots & 6-6 \end{Bmatrix}$$

Hay $6 \cdot 6 = 36$ resultados posibles y equiprobables.

Ahora sí podemos aplicar la Regla de Laplace:

$$p(A)=\frac{n^o\, de\, casos\, favorables}{n^o\, total\, de\, casos}=\frac{5}{36}$$

☞ <u>Ejemplo</u>: si lanzamos dos monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos caras?

Debemos ser cuidadosos a la hora de plantear el problema. No debemos pensar que sólo hay tres sucesos elementales –dos caras, dos cruces, cara y cruz– y que son equiprobables.

Pensemos que lanzamos primero una moneda y anotamos lo obtenido. Luego hacemos lo mismo con la segunda. El espacio muestral queda

$$E=\{CC, CX, XC, XX\}$$

donde los cuatro sucesos son equiprobables.

Queremos hallar la probabilidad del suceso

$$A='obtener\, dos\, caras'=\{CC\}$$

Por la Regla de Laplace

$$p(A)=\frac{1}{4}$$

☞ <u>Ejemplo</u>: en una urna hay 3 bolas rojas, 2 azules y 1 verde. Si sacamos una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul?

Si de esta urna se extraen dos bolas: ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

Aquí la Regla de Laplace puede aplicarse rápidamente y sin problemas:

$$p('azul')=\frac{n^o\, de\, bolas\, azules}{n^o\, total\, de\, bolas}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Con más detalle:

$$E=\{R_1, R_2, R_3, A_1, A_2, V_1\} \quad \text{y} \quad S='sale\, bola\, azul=\{A_1, A_2\}$$

De donde:

$$p(S)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

No debemos caer en el error de pensar de la siguiente forma:

$$E=\{rojo, azul, verde\}$$
$$\downarrow$$
$$p('azul')=\frac{1}{3}$$

5.Probabilidad condicionada

❑ Probabilidad condicionada.

Vamos a introducir este útil concepto con la ayuda del siguiente ejemplo.

En una población de 100 personas nos hemos interesado por dos variables: el sexo y la situación laboral. La siguiente tabla resume los datos:

	Trabaja	*Está en paro*	
Hombre	30	10	40
Mujer	30	30	60
	60	40	100

Una tabla de doble entrada como esta se denomina "tabla de contingencia". Observa cómo en sus márgenes se anotan los totales de cada variable estudiada.

☞ Hallemos la probabilidad de que una persona, elegida al azar, sea mujer.

Si llamamos M = "escogemos una mujer", aplicando la Regla de Laplace tenemos:

$$p(M)=\frac{n^o\, de\, mujeres}{n^o\, total\, de\, personas}=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$$

☞ Tomemos una persona al azar y hallemos la probabilidad de que esté trabajando:

Si llamamos T = "escogemos una persona que trabaja", aplicando la Regla de Laplace tenemos:

$$p(T)=\frac{n^o\, de\, trabajadores}{n^o\, total\, de\, personas}=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$$

☞ Supongamos ahora que sabemos que esa persona elegida es una mujer, y queremos hallar la probabilidad de que esté trabajando. Tenemos ahora una información que cambia el cálculo, pues la proporción de mujeres trabajadoras no es la misma que la global. Ahora lo que queremos calcular es algo así:

$$p('\,elegir\, una\, persona\, trabajadora\, sabiendo\, que\, es\, mujer\,')$$

Esto se escribe

$$p(T/M)$$

y se lee "probabilidad del suceso T supuesto que ha ocurrido M" o "probabilidad de T condicionada por M".

Es:

$$p(T/M)=\frac{n^o\, de\, mujeres\, trabajadoras}{n^o\, total\, de\, mujeres}=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$$

☞ No debemos confundir lo anterior con la probabilidad de elegir una mujer trabajadora:

$$p(T\cap M)=\frac{n^o\ de\ mujeres\ trabajadoras}{n^o\ total\ de\ personas}=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$$

En general, tomemos una experiencia aleatoria y consideremos dos sucesos A y B que puedan ocurrir. Supongamos que al realizar la experiencia sabemos que ha sucedido A y nos preguntamos por la probabilidad de que suceda ahora B.

Obtén tú la probabilidad de elegir al azar:

- un hombre
- una persona en paro sabiendo que es un hombre
- un hombre sabiendo que está en paro
- un hombre en paro

Esa probabilidad se representa por $p(B/A)$ y se denomina "probabilidad de B condicionada por A".

Esa probabilidad será:

$$\begin{aligned} p(B/A) &= \frac{n^o\ casos\ favorables\ a\ B\ y\ A}{n^o\ casos\ en\ que\ ocurre\ A} \\ &= \frac{n^o\ casos\ favorables\ a\ B\ y\ A/n^o\ total\ de\ casos}{n^o\ casos\ en\ que\ ocurre\ A/n^o\ total\ de\ casos} \\ &= \frac{p(A\cap B)}{p(A)} \end{aligned}$$

Tenemos así:

> Sean A y B son dos sucesos de un experimento aleatorio.
>
> La "probabilidad de B **condicionada** por A" es:
>
> $$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

Por supuesto, la probabilidad de A debe ser distinta de cero.

☞ Ejemplo: de una baraja sacamos dos cartas al azar, una a continuación de la otra. Calculemos las probabilidades siguientes:

– Que la primera carta sea un rey: si R_1 = "la 1ª cara es un rey" es

$$p(R_1)=\frac{n^o\ de\ reyes}{n^o\ de\ cartas}=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$$

– Que la segunda carta sea un rey, supuesto que la primera ha sido rey: si R_2 = "la 2ª cara es un rey" es

$$p(R_2/R_1)=\frac{n^o\ de\ reyes\ que\ quedan}{n^o\ de\ cartas\ que\ quedan}=\frac{3}{39}=\frac{1}{13}$$

– Que las dos cartas sean reyes: ese suceso es $R_1\cap R_2$.

Observemos que de la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$p(R_1\cap R_2)=p(R_1)\cdot p(R_2/R_1)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{13}=\frac{1}{130}$$

José Álvarez Fajardo

Dependencia e independencia de sucesos.

Es una idea que veremos con este ejemplo: consideremos una urna con 5 bolas verdes y 5 bolas blancas. Si sacamos dos bolas: ¿cuál es la probabilidad de que la 2ª sea verde supuesto que la 1ª ha sido verde?

☞ Si sacamos una bola y a continuación sacamos la otra, es claro que la primera extracción influye en el resultado de la segunda, ya que al realizar la extracción hay una bola verde menos, lo que varía las proporciones. Llamemos

V_1 = "la primera bola es verde" y V_2 = "la segunda bola es verde"

Tenemos

$$p(V_2/V_1)=\frac{4}{9}$$

Decimos que "el suceso V_2 depende del suceso V_1".

Estamos ante una extracción sin devolución.

☞ Si sacamos una bola, la devolvemos a la urna, y a continuación sacamos la otra, es claro que la primera extracción no influye en el resultado de la segunda. Ahora:

$$p(V_2/V_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

Decimos que "el suceso V_2 es independiente del suceso V_1".

Estamos ante una extracción con devolución.

En general:

Diremos que los sucesos A y B son independientes cuando

$$p(B/A)=p(B)$$

Ello equivale a

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$$

Tenemos así que si unos sucesos son independientes, la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades.

Probabilidad de la intersección.

En muchas exp. aleatorias es sencillo el cálculo de probabilidades condicionadas, y averiguar si dos o más sucesos son independientes o no. En estos casos la fórmula de las probabilidades condicionadas se usa para averiguar la probabilidad de la intersección de sucesos.

Así, por ejemplo:

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B/A)$$

Para tres sucesos tenemos:

$$p(A_1\cap A_2\cap A_3)=p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)\cdot p(A_3/A_1\cap A_2)$$

Esto puede generalizarse a un número cualquiera de sucesos:

Si $A_1,\ldots,A_n$ son sucesos de una exp. aleatoria entonces:

$$p(A_1\cap\ldots\cap A_n)=p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot p(A_n/A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

Podemos verlo así: para que ocurran los sucesos A_1 y A_2 y A_3, primero ha de suceder A_1, después debe ocurrir A_2, y una vez que han sucedido A_1 y A_2 debe ocurrir A_3

☞ Ejemplo: en una urna hay 3 bolas rojas y 4 azules. Si sacamos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que la 1º sea roja y la 2ª azul?

Método 1: Usamos la Combinatoria:

$$p(S)=\frac{n^o\ casos\ favorables}{n^o\ total\ de\ casos}=\frac{3\cdot 4}{7\cdot 6}=\frac{2}{7}$$

Método 2: Poniendo

R_1 = "la 1ª bola es roja" y A_2 = "la 2ª bola es azul"

Tenemos:

$$p(R_1\cap A_2)=p(R_1)\cdot p(A_2/R_1)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{7}$$

De esta urna se extraen dos bolas: ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

6.Experiencias compuestas

En ejemplos anteriores ya hemos hecho uso de la técnica consistente en considerar una experiencia como una prueba compuesta. Vamos a introducir la técnica con el siguiente ejemplo:

Problema: De una urna con 4 bolas blancas y 3 negras extraemos dos bolas. Hallemos la probabilidad de que ambas sean negras.

Método 1: Designemos a las bolas por $b_1, b_2, b_3, b_4, n_1, n_2, n_3$. El espacio muestral tiene $7\cdot 6=42$ resultados posibles, y es:

$$E=\left\{\begin{matrix} b_1-b_2, & b_1-b_3, & b_1-b_4, & b_1-n_1, & b_1-n_2 & b_1-n_3\\ b_2-b_1, & b_2-b_3, & b_2-b_4, & b_2-n_1, & b_2-n_2 & b_1-n_3\\ b_3-b_1, & b_3-b_2, & b_3-b_4, & b_3-n_1, & b_3-n_2 & b_3-n_3\\ b_4-b_1, & b_4-b_2, & b_4-b_3, & b_4-n_1, & b_4-n_2 & b_4-n_3\\ n_1-b_1, & n_1-b_2, & n_1-b_3, & n_1-b_4, & n_1-n_2 & n_1-n_3\\ n_2-b_1, & n_2-b_2, & n_1-b_3, & n_2-b_4, & n_2-n_1 & n_2-n_3\\ n_3-b_1, & n_3-b_2, & n_3-b_3, & n_3-b_4, & n_3-n_1 & n_3-n_2 \end{matrix}\right\}$$

Método directo: consiste en la enumeración de todas las posibilidades.

Es útil por su sencillez, pero cuando el número de posibilidades es alto no es útil.

A = "ambas bolas son negras" está formado por $3\cdot 2=6$ elementos:

$$A=\{n_1-n_2, n_1-n_3, n_2-n_1, n_2-n_3, n_3-n_1, n_3-n_2\}$$

Por la Regla de Laplace:

$$p(A)=\frac{n^o\ de\ casos\ favorables}{n^o\ total\ de\ casos}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}$$

Método 2: Aplicamos la Regla de Laplace, usando la Combinatoria:

$$p(A)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}$$

Método combinatorio: se basa en el uso de la Regla de Laplace, pero usando métodos de recuento adecuados para el cálculo de los casos.

Rápido y efectivo, exige conocimientos de Combinatoria y tener de antemano bien diseñada la estrategia.

Método 3: Supondremos que sacaremos una bola a continuación de la otra:

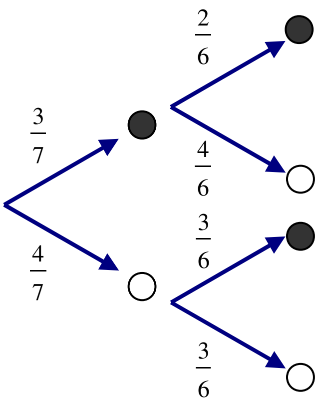
N_1 = "la bola 1 es negra" y N_2 = "la bola 2 es negra"

Así, nos queda que A = "ambas bolas son negras" = $N_1 \cap N_2$ y es

$$p(N_1 \cap N_2) = p(N_1) \cdot p(N_2 / N_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

Prueba compuesta: consiste en considerar la experiencia como la conjunción de varias fases, que son exp. aleatorias más simples.

Es usual y muy útil guiarse con un esquema de árbol que nos muestra las probabilidades de las distintas fases:



$$p(N_1 \cap N_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

Este diagrama de árbol resume el procedimiento: junto a cada rama se coloca la probabilidad de obtener el final, condicionada por el origen del que parte.

Cada trayecto nos muestra la intersección de cada una de las etapas, y su probabilidad es el producto de las probabilidades del camino.

En general:

Hay experimentos aleatorios que pueden considerarse como la concatenación de varios exp. aleatorios "más simples". En ese caso se dice que cada uno de éstos es una **fase** o etapa, y que estamos ante un **experimento compuesto**.

Se dice que las fases de un exp. compuesto son **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no influye en el resultado de las siguientes.

☞ Ejemplo: el temario de unas oposiciones tiene un total de 100 temas. Un opositor se ha preparado 50 para el examen, consistente en contestar a dos temas extraídos al azar. Hallaremos la probabilidad de que haya estudiado ambos temas.

Supondremos que se trata de una prueba con dos fases: primero se elige el primer tema y a continuación el segundo.

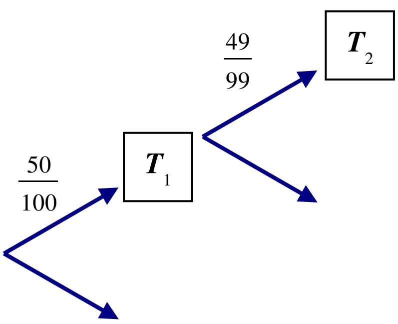
Sean T_1 = "estudió el tema 1" y T_2 = "estudió el tema 2"

Es $T_1 \cap T_2$ = "estudió el tema 1 y el tema 2"

$$p(T_1 \cap T_2) = p(T_1) \cdot p(T_2 / T_1) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{198} = 0'247\ldots$$

Completa el árbol y halla las probabilidades siguientes:

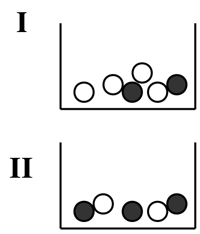
- "No se sabe ninguno de los dos temas"
- "Se sabe uno de los temas"
- "Se sabe al menos uno de los temas"



$$p(T_1 \cap T_2) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{198}$$

7.Teorema de la probabilidad total.

Mostraremos el contenido de este Teorema con el siguiente problema:



Problema: Tenemos las dos urnas dibujadas en el margen. Lanzamos un dado y si obtenemos un número menor que tres sacamos una bola de la urna I, en caso contrario la sacamos de la urna II. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca?

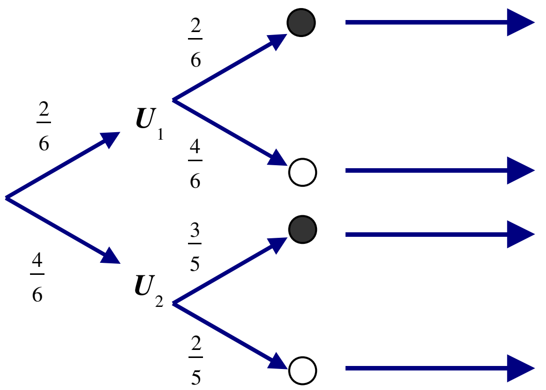
Separaremos el exp. en dos fases: el lanzamiento del dado y la extracción de la bola. Consideremos los sucesos:

U_1 = "sale en el dado 1 o 2"

U_2 = "sale en el dado 3 o 4 o 5 o 6"

B = "la bola sacada es blanca"

El diagrama de árbol nos muestra la estructura de la prueba:



$$p(U_1 \cap N) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

$$p(U_1 \cap B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9}$$

$$p(U_2 \cap N) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$p(U_2 \cap B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

El suceso B es ocurrirá suceda "U_1 y B" o cuando suceda "U_2 y B"::

$$B = (U_1 \cap B) \cup (U_2 \cap B)$$

Luego:

$$p(B) = p(U_1 \cap B) + p(U_2 \cap B)$$

Mirando en el diagrama:

$$p(B) = \frac{2}{9} + \frac{4}{15} = \frac{22}{45} = 0'48\ldots$$

Halla la probabilidad de obtener bola negra:

- Con el mismo procedimiento
- A través del suceso contrario

Observemos que con este proceder se descompone cada suceso en unión de varios disjuntos, siendo cada uno de ellos una intersección. La probabilidad de éstos se calcula siguiendo el Teorema de la probabilidad compuesta, a través de probabilidades condicionadas.

Vamos al enunciado del llamado "Teorema de la Probabilidad Total":

Si $S_1, \ldots, S_n$ son un conjunto de sucesos incompatibles dos a dos y cuya unión es el espacio muestral E, para todo suceso A se tiene:

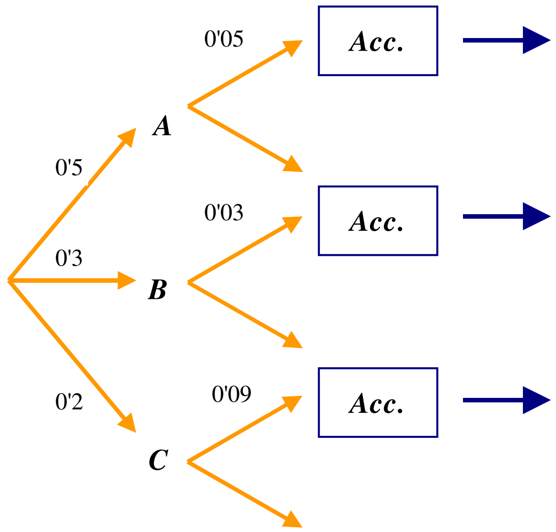
$$p(A) = \sum_k p(S_k) \cdot p(A/S_k)$$

Unos sucesos S_1, ..., S_n que verifican esas propiedades se denomina un "sistema completo de sucesos"

☞ Ejemplo: un conductor circula por una vía que sólo tiene tres salidas: A, B y C. La probabilidad de elegir salida A es 0'5 y la de elegir B es de 0'3. La probabilidad de tener un accidente en la salida A es 0'05, la de tenerlo en la B es 0´03 y la de tenerlo en la salida C es 0'09.

Vamos a calcular la probabilidad de que sufra un accidente

El diagrama de árbol siguiente nos muestra esquemáticamente el desarrollo de la experiencia:



$p(A\ y\ Acc)=0'5\cdot 0'05=0'0025$

$p(B\ y\ Acc)=0'3\cdot 0'03=0'009$

$p(C\ y\ Acc)=0'2\cdot 0'09=0'018$

Para hallar la probabilidad de que sufra un accidente sumamos todas las probabilidades favorables a ese suceso:

$$p(Acc)=0'025+0'009+0'018=0'052$$

Observemos cómo es el desarrollo completo del proceso:

$$p(Acc)=p(A)\cdot p(Acc/A)+p(B)\cdot p(Acc/B)+p(C)\cdot p(Acc/C)=0'052$$

8. Enunciado general

Sigamos con el ejemplo anterior.

Tratemos ahora de responder a la siguiente cuestión: si el conductor anterior ha tenido un accidente en una de las salidas, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en la A?

Se trata de la siguiente probabilidad condicionada:

$$p(A/Acc)=\frac{p(A\cap Acc)}{p(Acc)}=\frac{0'025}{0'052}=\frac{25}{52}=0'48\ldots$$

Esta probabilidad es llamada "a posteriori" y nos señala, de las veces que ocurre un accidente, en qué proporción se producen en la salida A. Concretamente, un 48% de los accidentes en las salidas se producen en ella.

La generalización de esto se denomina "Teorema de Bayes":

Si $S_1, \ldots, S_n$ es un sistema completo de sucesos, para todo suceso A es:

$$p(S_i/A) = \frac{p(S_i \cap A)}{p(A)} = \frac{p(S_i) \cdot p(A/S_i)}{\sum_k p(S_k) \cdot p(A/S_k)}$$

Las probabilidades $p(S_i)$ se denominan "a priori".

Las probabilidades $p(A/S_i)$ se denominan "verosimilitudes".

La probabilidad $p(S_i/A)$ se denomina "a posteriori".

- <u>Demostración:</u>

  La probabilidad condicionada es: $p(S_i/A) = \dfrac{p(S_i \cap A)}{p(A)}$

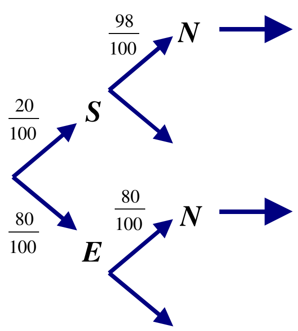
  Por la prob. de la intersección: $p(S_i \cap A) = p(S_i) \cdot p(A/S_i)$

  por la prob. total: $p(A) = \sum_k p(S_k) \cdot p(A/S_k)$

  Reuniendo las tres fórmulas obtenemos la resultado. #

☞ <u>Ejemplo</u>: un fabricante decide lanzar al mercado dos electrodomésticos. El primero, bajo de nombre de Supremo, se construye con elementos de calidad y pasan un exigente control, consiguiéndose que un 98% de ellos no falle en 5 años. El segundo producto, de nombre Excelencia es de calidad inferior y pasan controles de calidad menos exigentes, y tiene una fiabilidad del 80% en ese mismo período. Un 20% de la producción será Supremo, y el resto Excelencia. Tomamos un equipo al azar y vemos que funciona sin averías durante los 5 años. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un Excelencia?

Observemos que estamos ante una probabilidad a posteriori: nos piden la probabilidad de que sea "Excelencia" bajo el supuesto de que el equipo ha superado los cinco años de prueba.



Llamamos S = "elegimos un supremo"

E = "elegimos un excelencia"

N = "elegimos un producto que no falla en 5 años"

$$p(E/N) = \frac{p(E \cap N)}{p(N)} = \frac{p(E) \cdot p(N/E)}{p(E) \cdot p(N/E) + p(S) \cdot p(N/S)}$$

Calculando, obtenemos una probabilidad del 77%, aproximadamente, de que sea un Excelencia.

Ejercicios

1. [S/97] Se lanza una moneda dos veces:

a) Halla la probabilidad de que sean ambas cruces.

b) Sabiendo que al menos en una de las tiradas sale cara, ¿cuál es la probabilidad de que en ambas haya salido cara?

2. [S/97] Dados los sucesos A y B de un mismo espacio muestral, se sabe que es:

$$p(A)=0'4\ ,\ p(A\cup B)=0'8\ ,\ p(\overline{A}\cup\overline{B})=0'7$$

a) Comprueba si los sucesos A y B son independientes.

b) Calcula la probabilidad de que sólo se verifique uno de los dos sucesos.

3. [S/97] Una emisora de televisión emite dos series: A y B. La serie A la ve el 20% de la población, mientras que la B sólo la ve el 15%, pero mientras el 70% de los que empiezan a ver la A la sigue hasta el final, en cambio el 80% de los que empiezan a ver la B la acaban.

Una persona nos dice que no terminó de ver la serie que había empezado, ¿cuál es la probabilidad de que estuviera viendo la serie A?

4. [S/97] De los turistas que visitan Málaga, el 60% hace que el viaje en avión, el 30% lo hace por carretera y el 10% lo hace por tren. De los que viajan en avión el 70% va a las playas de la costa occidental. De los que viajan por carretera el 80% va a las playas de la costa occidental. De los que viajan por tren, el 50% va a las playas de la costa occidental.

a) Si se selecciona al azar un turista que ha visitado Málaga, ¿cuál es la probabilidad de que haya estado en las playas de la costa occidental?

b) Si se selecciona al azar un turista que ha visitado Málaga y que ha estado en las playas de la costa occidental, ¿cuál es la probabilidad de que haya viajado en tren?

5. [S/97] La caja A contiene 40 bolígrafos azules y 30 bolígrafos rojos. La caja B contiene 30 bolígrafos azules y 30 rojos. Por último hay una tercera caja C con 30 bolígrafos azules y 20 rojos.

Se elige una caja al azar y de ella, también al azar, se extrae un bolígrafo.

¿Cuál es la probabilidad de que el bolígrafo extraído sea azul?

6. [S/97] Una *empresa* de productos lácteos elabora sus productos en tres factorías: A, B y C. Las cuotas de producción de cada factoría (porcentaje de la producción total de cada factoría) y el porcentaje de productos defectuosos son los siguientes:

	A	**B**	**C**
Cuotas de producción	0'35	0'40	0'25
Envasado defectuoso	0'02	0'01	0'03

Si se toma un producto de esta marca al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su envasado sea defectuoso?

7. [S/97] Un estudiante hace dos pruebas el mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es 0'6, la de que pase la segunda es 0'8 y la de que pase ambas 0'5.

a) Calcula la probabilidad de que no pase ninguna prueba.

b) Calcula la probabilidad de que pase la segunda prueba si no ha suspendido la primera.

8. [S/97] El temario de una oposición consta de 100 temas. En el momento del examen se sortean dos y el opositor debe responder obligatoriamente a los dos temas que le han tocado en suerte.

Calcula cuántos temas, como mínimo, debe estudiar un opositor para que la probabilidad de saberse los dos temas que le toquen sea superior a 0´5.

9. [S/97] Se dispone de dos bolsas con bolas numeradas en su interior. La 1ª bolsa contiene siete bolas numeradas del 1 al 7, y la 2ª tres, numeradas del 8 al 10. Se realiza el siguiente experimento compuesto: se saca una bola al azar de la primera bolsa y, tras anotar su número, se introduce en la segunda bolsa; después se saca una bola al azar de la segunda bolsa y se anota su número.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean pares?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea impar?

10. [S/97] En un colectivo de 200 personas se ha observado que 120 son hombres y que de éstos 54 son fumadores, y que 44 mujeres de este colectivo no fuman.

Con estos datos razonar si el suceso "fumar" depende del sexo.

11. [S/97] Tras una encuesta realizada en cierta población andaluza, se ha concluido que si se elige al azar un individuo de ella, la probabilidad de que esté a favor de la retransmisión de partidos de fútbol es $0'8$, la de que esté a favor de la existencia de canales de TV de pago es $0'4$ y la de que esté a favor ambos es $0'3$.

a) Calcula la probabilidad de que una persona de esa población esté a favor de la retransmisión de partidos o de que esté a favor de la existencia de canales de televisión de pago.

b) Calcula la probabilidad de que una persona de esa población ni esté a favor de la retransmisión de partidos de fútbol ni de la existencia de canales de televisión de pago.

12. [S/98] Ana, Juan y Raúl, que están esperando para realizar una consulta médica, sortean al azar el orden en que van a entrar.

a) Calcule la probabilidad de que los dos últimos en entrar sean hombres.

b) Determine si son independientes los sucesos S_1 y S_2, siendo:

S_1 = "la mujer entra antes que alguno de los hombres"

S_2 = "los dos hombres entran consecutivamente"

13. [S/98] En una urna hay 8 bolas negras y 5 bolas blancas.

a) Calcule la probabilidad de que al extraer dos bolas, con reemplazamiento, la primera sea negra y la segunda blanca.

b) Calcule la probabilidad de que al extraer dos bolas, sin reemplazamiento, la primera sea negra y la segunda blanca.

14. [S/98] Se dispone de un mazo de 450 fichas de estudiantes en una escuela de idiomas.

Cada estudiante cursa un solo idioma de los tres que se imparten. El número de mujeres es tres medios del de hombres y los estudiantes de inglés representan el 80% del alumnado. El número de estudiantes de francés duplica al de alemán.

Sea M el suceso "sacar una ficha de mujer" al extraer una ficha al azar del citado mazo. Y sean, análogamente, H, I, F y A sacar hombre, inglés, francés y alemán, respectivamente. Sabiendo que M/A es el suceso seguro y que M y H/F son equiprobables, determine:

a) Probabilidad de F y de $M \cap I$.

b) Probabilidad de F/M

15. [S/98] En una población, donde el 42% son hombres y el resto mujeres, se sabe que el 4% de los hombres y el 6% de las mujeres son inmigrantes.

a) ¿Qué porcentaje de inmigrantes hay en esta población?

b) Si se elige, al azar, un inmigrante de esa población, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

16. [S/98] Se ha observado que de cada 20 recién nacidos, 11 son niños. La probabilidad de que un niño tenga los ojos azules es $0'2$, mientras que la de que una niña los tenga azules es $0'3$. Se elige, al azar, un recién nacido, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga los ojos azules?

17. [S/98] Una tienda vende frigoríficos y ha efectuado un seguimiento de los 2.000 frigoríficos vendidos durante ese año, obteniendo una relación del número de aparatos que han tenido alguna avería antes de los dos primeros años, según tres tipos de marcas – A, B, C –:

	A	***B***	***C***
Averiada (Av)	13	4	3
No averiada (No Av)	987	396	597

a) Comparando $p(Av/A)$, $p(Av/B)$, $p(Av/C)$ di cuál de los tres ha resultado ser más segura.

b) Estudia si hay dependencia entre el suceso "tener una avería" con cada uno de los sucesos "tener una marca determinada".

18.[S/98] Una determinada enfermedad puede estar provocada por tres causas – A , B , C –, en las proporciones 30%, 20%, 50% respectivamente. Y en cada enfermo sólo se presenta una de estas tres causas.

El tratamiento de esta enfermedad requiere hospitalización en el 20% de los casos si está provocada por A, en el 55% si la causa es B y en el 10% si es C.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un enfermo cualquiera de la citada enfermedad no necesite hospitalización?

b) Si un enfermo está hospitalizado, ¿cuál es la probabilidad de que la causa sea A?

19.[S/98] Un cruce está regulado por un semáforo. La probabilidad de que esté en rojo es 1/2, la de que esté en verde 1/3 y la de que esté en ámbar es 1/6.

La probabilidad de tener que detenerse cuando está en verde es de 1/10 y la de detenerse cuando está en ámbar es 1/2. Cuando el semáforo está en rojo todos los conductores se detienen.

a) Calcule la probabilidad de que un conductor que pase tres veces pro dicho cruce encuentre las tres veces el semáforo en rojo.

b) Calcule la probabilidad de que un conductor que pase una vez tenga que detenerse pro algún motivo.

20.[S/98] En un grupo de alumnos, el 80% ha aprobado las Matemáticas y el 25% la Física. También se sabe que han aprobado las Matemáticas o la Física el 85%.

Estudie si son independientes los sucesos "aprobar Matemáticas" y "aprobar Física"

21.[S/98] Una caja contiene dos monedas. Una tiene grabada cara y cruz; la otra dos caras.

Se toma de la caja, al azar, una moneda y se lanza al aire.

a) Calcule la probabilidad de obtener cara.

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara y ser moneda de dos caras?

22.[S/98] De una baraja española se saca una carta y, sin devolverla a la baraja, se saca otra.

a) Calcule la probabilidad de que las dos cartas extraídas sean oros.

b) Sabiendo que la segunda carta es un oro, calcule la probabilidad de que lo haya sido también la primera.

23.[S/99] En un hospital se han producido 60 nacimientos en una semana. De ellos 35 son varones y de éstos 21 tienen el pelo negro. Asimismo, se ha observado que de las niñas nacidas 10 no tienen el pelo negro.

Basándose en estos datos razone si tener el pelo negro depende, o no, del sexo.

24.[S/99] Una determina población está formada, a partes iguales, por hombres y mujeres. La probabilidad de que un individuo de esa población no lea ningún periódico es 0'25. Además el porcentaje de individuos que o bien leen algún periódico o bien son hombres es el 95%. Se elige, al azar, una persona.

a) Halle la probabilidad de "ser hombre y leer algún periódico".

b) Halle la probabilidad de que lea algún periódico, sabiendo que es hombre.

25.[S/99] La probabilidad de que un conductor no lleve la rueda de repuesto es 0'13 y la de que no lleve lámparas de repuesto es 0'37. Se sabe que el 60% de los conductores llevan ambos repuestos.

a) Calcule la probabilidad de que un conductor no lleve alguno de los dos repuestos señalados.

b) ¿Son independientes los sucesos "llevar rueda de repuesto" y "llevar lámparas de repuesto"?

26. [S/99] Una experiencia consiste en preguntar a tres personas distintas, elegidas al azar, si son partidarias o no de consumir un determinado producto.

a) Escriba el espacio muestral asociado a dicho experimento, utilizando las letra "*s*" para las respuestas afirmativas y la "*n*" para las negativas.

b) ¿Qué elementos del espacio muestral anterior constituyen el suceso "al menos dos de las personas son partidarias de consumir el producto"?

c) Describa el suceso contrario de "más de una persona es partidaria de consumir el producto".

27. [S/99] Se dispone de una baraja española de 40 cartas. Se saca una carta al zar y, sin devolverla a la baraja, se saca otra también al azar.

a) Calcule la probabilidad de que ninguna de las cartas extraídas sea una figura.

b) Sabiendo que la segunda carta extraída no ha sido una figura, calcule la probabilidad de que tampoco lo fuera la primera.

28. [S/99] En un supermercado, el 70% de las compras las realizan mujeres; de las compras realizadas por éstas, el 80% supera las 2.000 pta., mientas que de las compras realizadas por hombres sólo el 30% supera esa cantidad.

a) Elegido un ticket de compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere las 2.000 pta.?

b) Si se sabe que un ticket de compra no supera las 2.000 pta., ¿cuál es la probabilidad de que la compra haya sido hecha por una mujer?

29. [S/99] Disponemos de 3 urnas y de 10 bolas, 5 blancas y 5 negras. Distribuimos las bolas de la siguiente manera:

En la 1ª urna ponemos 1 blanca y 1 negra.

En la 2ª urna ponemos 3 blancas y 2 negras.

En la 3ª urna ponemos 1 blanca y 2 negras.

De una de las urnas, elegida al zar, se extrae una bola. Halle la probabilidad de que la bola elegida sea negra.

30. [S/99] Tenemos tres cajas de bombones A, B y C. La caja A contiene 10 bombones, de los cuales 4 están rellenos; la caja B contiene 8 bombones, de los cuales 3 están rellenos y la caja C contiene 6 bombones, de los que 1 está relleno.

a) Tomamos al azar un bombón de la caja A: hall la probabilidad de que no esté relleno

b) Si elegimos al azar una de las tres cajas y tomamos un bombón de la caja elegida, ¿cuál es la probabilidad de que esté relleno?

31. [S/99] En un espacio muestral dado se consideran dos sucesos A y B tales que su unión es el suceso seguro, y las probabilidades condicionadas entre ellos valen $p(A/B)=\frac{1}{2}$ y $p(B/A)=\frac{1}{3}$. Halle las probabilidades de los sucesos A y B.

32. [S/99] El 40% de los habitantes de una ciudad va al cine, el 30% va al teatro y el 20% a ambos.

a) Si una persona de esa ciudad no va al cine, ¿cuál es la probabilidad de que tampoco vaya al teatro?

b) Si una persona no va al teatro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya al cine?

33. [S/99] En un centro de enseñanza secundaria se sabe que el 70% de los alumnos practican atletismo, que el 50% juega al fútbol, y que el 40% de los que practican atletismo juega al fútbol

a) Razone si los sucesos "jugar al fútbol" y "practicar atletismo" son independientes.

b) Si se elige al azar un alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que no participe en ninguno de estos dos deportes?

34. [S/99] A un congreso médico asisten oculistas y pediatras. Sabemos que 240 médicos son andaluces, 135 navarros y 225 canarios. El número total de pediatras es 315. De los andaluces, 96 son oculistas y de los navarros son oculistas 75.

a) Escogemos un asistente al azar: ¿cuál es la probabilidad de que sea un pediatra navarro?

b) Hemos elegido un médico canario: ¿cuál es la probabilidad de que sea oculista?

c) ¿Son independientes los sucesos "ser andaluz" y "ser oculista"?

35. [S/00] En un conjunto de estudiantes, el 15% estudia alemán, el 30% estudia francés y el 10% ambas materias.

a) ¿Son independientes los sucesos "estudiar alemán" y "estudiar francés"?

b) Si se elige un estudiante al azar, calcule la probabilidad de que no estudie ni francés ni alemán.

36. [S/00] De una lista de 10 personas, de las que 7 son hombres, seleccionamos 2 personas al azar. Calcula la probabilidad de que sean de distinto sexo en los siguientes casos:

a) Se eligen sin reemplazo.

b) Se eligen con reemplazo

37.[S/00] En un Instituto se ofertan tres modalidades excluyentes A , B y C y dos idiomas excluyentes: Inglés y Francés. La modalidad A es elegida por un 50% de alumnos, la B por un 30% y la C por un 20%.

También se conoce que han elegido Inglés el 80% de los alumnos de la modalidad A, el 90% de la modalidad B y el 75% de la C, habiendo elegido Francés el resto de los alumnos.

a) ¿Qué porcentaje de estudiantes del Instituto ha elegido Francés?

b) Si se elige al azar un estudiante de Francés, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la modalidad A?

38.[S/00] Un ladrón, al huir de un policía, puede hacerlo por las calles A , B ó C, con las siguientes probabilidades:

$$p(A)=0'25 \ , \ p(B)=0'6 \ \text{ y } \ p(C)=0'15$$

La probabilidad de ser alcanzado si huye por la calle A es 0'4, si huye por la calle B es 0'5, y si huye por la C es 0'6.

a) Halle la probabilidad de que el policía alcance al ladrón.

b) Si el ladrón ha sido alcanzado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido alcanzado en la calle A?

39.[S/00] El 80% de los alumnos de un IES son aficionados al fútbol y el 60% al cine; la mitad de los alumnos de ese IES lo son a las dos cosas. Se elige un alumno al azar:

a) Halle la probabilidad de que no sea aficionado a ninguna de las dos cosas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea aficionado al cine sabiendo que no es aficionado al fútbol?

40. [S/00] Dos sucesos A y B son tales que

$$p(A)=0'30 \ , \ p(B/A)=0'10 \ \text{ y } \ p(\overline{A\cup B})=0'63$$

a) ¿Es A independiente de B? ¿Es B independiente de A?

b) Calcule $p(\overline{A}\cup\overline{B})$

41.[S/00] En un famoso concurso de televisión basta con responder acertadamente a 15 preguntas para ganar 50 millones de pesetas. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas, de las que sólo una es verdadera.

a) Determine la probabilidad de que un concursante que no sabe ninguna pregunta y responde al azar pueda ganar los 50 millones.

b) Determine la probabilidad de que un concursante con cultura media que sólo conoce las respuestas correctas de las 5 primeras preguntas, acierte las respuestas de las 10 últimas, si éstas las contesta al azar.

42. [S/00] La población española está compuesta por un 55% de mujeres, de las que un 8% ha realizado en alguna ocasión una compra por Internet. Se sabe que la probabilidad de que una persona haya comprado alguna vez usando Internet es 0'3.

Halle la probabilidad de que un hombre, elegido al azar, haya comprado alguna vez por Internet.

43.[S/00] De entre los alumnos que cursan 2º curso del Bachillerato de Ciencias de la Salud, el 80% elige Estadística como optativa y el resto Matemáticas. No hay alumnos que cursen las dos materias a la vez. El 40% de los alumnos que eligen Estadística supera el curso, mientras de los que eligen Matemáticas el 55% supera el curso.

a) Elegido un alumno al azar, calcule la probabilidad de que supere el curso.

b) Si un alumno ha superado el curso, calcule la probabilidad de que haya elegido Estadística.

44. [S/00] En una clase el 60% de los alumnos aprobó Historia y la mitad de la clase aprobó Inglés. Se sabe que el 70% de los alumnos que aprobaron Historia aprobó Inglés.

a) Halle la probabilidad de que un alumno cualquiera de la citada clase apruebe al menos una de las dos asignaturas.

b) Calcule el porcentaje de los alumnos que, habiendo aprobado Inglés, aprueban Historia.

c) ¿Son independientes los sucesos "aprobar Historia" y "aprobar Inglés"? Razone la respuesta.

45.[S/00] La tabla adjunta muestra los resultados de una encuesta realizada entre varias personas con estudios primarios (*P*), medios (*M*) y superiores (*S*), sobre la pregunta de si fuman (*F*) o no fuman (F^c):

	P	**M**	**S**
F	190	120	12
$\boldsymbol{F^c}$	60	280	138

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona encuestada con estudios primarios fume? ¿Y si tiene estudios superiores?

b) ¿Son independientes los sucesos “tener estudios superiores” y “no fumar”?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona encuestada que fume no tenga estudios superiores?

46. [S/00] Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que

$$p(A)=0'7 \ , p(B)=0'6 \ \text{ y } \ p(A\cup B)=0'9$$

a) Justifique si A y B son independientes.

b) Calcule $p(A/\overline{B})$ y $p(B/\overline{A})$

47.[S/01] Tenemos dos urnas A y B , que contienen las siguientes bolas: A (5 blancas, 3 negras y 2 rojas) y B (4 blancas y 6 negras).

También tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y las otras dos con la letra *B*. Tiramos el dado y sacamos una bola al azar de la urna que indica el dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

c) La bola extraída ha resultado ser blanca: ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna *B*?

48.[S/01] En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:

A: "sacar al menos una cara y una cruz"

B: "sacar a lo sumo una cara"

a) Determine el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos A y B.

b) ¿Son independientes ambos sucesos?

49.[S/01] Una caja contiene diez tornillos, de los que dos son defectuosos.

a) Si vamos extrayendo tornillos, uno tras otro, hasta localizar los dos defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de necesitar exactamente tres extracciones para localizarlos?

b) Si extraemos sólo dos tornillos, y el segundo ha resultado ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el primero también lo haya sido?

50.[S/01] Disponemos de tres dados, uno de los cuales está trucado. La probabilidad de sacar un cinco en el trucado es 0´25, siendo los otros resultados equiprobables. Se elige un dado al azar y se realiza un lanzamiento con él.

a) Determine la probabilidad de obtener un dos.

b) Dado que ha salido un dos, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos elegido el dado trucado?

51.[S/01] En una ciudad el 60 % de sus habitantes son aficionados al fútbol, el 30 % son aficionados al baloncesto y el 25 % a ambos deportes.

a) ¿Son independientes los sucesos “ser aficionado al fútbol” y “ser aficionado al baloncesto”?.

b) Si una persona no es aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que no sea aficionada al baloncesto?

c) Si una persona no es aficionada al baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que sea aficionada al fútbol?

52.[S/01] Tenemos un cofre A con 2 monedas de oro y 3 de plata, un cofre B con 5 monedas de oro y 4 de plata y un tercer cofre C con 2 monedas de oro. Elegimos un cofre al azar y sacamos una moneda.

a) Calcule la probabilidad de que sea de oro.

b) Sabiendo que ha sido de plata, calcule la probabilidad de que haya sido extraída del cofre A.

53.[S/01] Sean A y B dos sucesos tales que

$$p(A)=\frac{1}{2}\ ,p(B)=\frac{1}{3}\ \text{y}\ \ p(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

Calcule:

a) $p(A/B)$ y $p(B/A)$.

b) $p(A\cup B)$.

c) $p(A^c\cap B)$.

54.[S/01] En un cineclub hay 80 películas; 60 son de "acción" y 20 de "terror". Susana elige una película al azar y se la lleva. A continuación Luis elige otra película al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tanto Susana como Luis elijan películas de acción?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la película elegida por Luis sea de acción?

55.[S/01] Dos cajas, A y B, tienen el este contenido:

A : 5 monedas de 1 euro y 3 de 10 pesetas.

B : 4 monedas de 1 euro, 4 de 10 pts. y 2 de 25 pts.

De una de las cajas elegida al azar, se extrae una moneda.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de 1 euro?

b) Si la moneda extraída resulta ser de 10 pesetas, halla la probabilidad de que proceda de la caja B.

56.[S/01] La probabilidad de que un jugador A marque un gol de penalti es de 5/6, mientras que la de otro jugador B es 4/5. Si cada uno lanza un penalti,

a) Halle la probabilidad de que marque gol uno solo de los dos jugadores.

b) Halle la probabilidad de que al menos uno marque gol.

57.[S/01] Dado un espacio muestral E se consideran los sucesos A y B, cuyas probabilidades son $p(A)=\frac{2}{3}$ y $p(B)=\frac{1}{2}$.

a) ¿Pueden ser los sucesos A y B incompatibles? ¿Por qué?

b) Suponiendo que los sucesos A y B son independientes, calcule $p(A\cup B)$.

c) Suponiendo que $A\cup B=E$, calcule $p(A\cap B)$.

Cuestiones

1. Comprueba con un ejemplo que dos sucesos pueden ser incompatibles sin ser contrarios.

2. Consideremos los sucesos A y B en una experiencia aleatoria. Expresa los sucesos siguientes:

a) Se realizan ambos.

b) Se realiza A pero no B.

c) No se realiza ninguno de ellos.

d) Ocurre uno al menos de los dos.

3. La diferencia de dos sucesos, A y B, es el suceso que se realiza cuando ocurre A y no B. Represéntalo con unos diagramas de Venn y comprueba con un ejemplo que es:

$$A-B=A\cap B^c$$

4. ¿Cuál es el suceso contrario del suceso seguro?

5. Si unimos un suceso y su contrario, ¿qué obtenemos? ¿Y si los intersectamos? Compruébalo con un ejemplo.

6. Sea $E=\{a,b,c,d,e,f\}$ el espacio muestral de un experimento y p una medida de probabilidad definida de modo que es:

$$p(\{a\})=p(\{b\})=p(\{c\})=p(\{d\})=\frac{1}{8}\ ,\ p(\{e\})=\frac{1}{4}$$

Se consideran los sucesos:

$$A=\{a,c,d,e\}\ \text{y}\ \ B=\{d,e,f\}$$

Calcula:

$$p(A)\ ,\ p(B)\ ,\ p(A\cup B)\ \text{y}\ \ p(A\cap B)$$

7. Sean A y B dos sucesos de los que se conocen

$$p=p(A)\ \ q=p(B)\ \ \text{y}\ \ r=p(A\cap B)$$

Expresa en función de p, q, r las probabilidades de los sucesos:

C = "no ocurre ninguno de los sucesos A y B"

D = "sucede exactamente uno de los sucesos A o B"

8. Comprueba que al sacar una carta de una baraja, los sucesos "sacar un as" y "sacar un oros" son independientes.

9. Sean A y B dos sucesos tales que las probabilidades

$$p(A)=a\ ,\ p(B)=b\ \text{ y }\ p(A\cap B)=c$$

son conocidas. Obtén en función de a , b , c:

a) $p(A\cup B)$

b) $p(A^c\cap B^c)$

c) $p(A^c\cup B)$

10. Sean A y B dos sucesos de un exp. aleatorio del que se conocen sus probabilidades

$$p(A)=0'6\ \text{ y }\ p(B)=0'7$$

y que es

$$p(A\cup B)-p(A\cap B)=0'3$$

Calcula

$$p(A\cup B)\ \text{ y }\ p(A\cap B)$$

11. Sean A y B dos sucesos de un exp. aleatorio del que se conocen

$$p(A)=0'4\ \ p(B)=0'3\ \text{ y }\ p(A\cap B)=0'1$$

Calcula razonadamente:

a) $p(A\cup B)$ b) $p(A/B)$

c) $p(A^c\cup B^c)$ d) $p(A^c\cap B)$

12. Comenta la siguiente afirmación: "Si A y B son dos sucesos asociados a un determinado exp. aleatorio, $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$ "

13. Escribe la fórmula que da la probabilidad de la unión de dos sucesos independientes en términos de probabilidad de cada uno de ellos.

14. Sean A y B dos sucesos posibles que se pueden presentar en un exp. aleatorio. Demostrar que si A y B son independientes también lo son sus sucesos contrarios.

15. Probar que si los sucesos A y B son independientes también lo son los sucesos

a) A y B^c b) A^c y B

16. Estudia la posible independencia de dos sucesos A y B en los casos siguientes, señalando cuándo serán independientes:

a) A y B son mutuamente excluyentes y de probabilidad no nula.

b) A está incluido en B, y A es un suceso de probabilidad no nula.

c) A es cualquier suceso y $p(B)=0$.

17. Sea A un suceso con $0<p(A)<1$.

a) ¿Puede ser A independiente de su contrario?

b) Sea B otro suceso tal que $A\supset B$. ¿Serán A y B independientes?

c) Sea C un suceso independiente de A. ¿Serán A y C^c independientes?

Autoevaluación

1. En una comisaría de policía trabajan los inspectores Ana, Mercedes, Juan, Luis y Pedro. Dos de ellos deben encargarse de investigar la muerte de un narcotraficante. Si la pareja se elige al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad que tiene una pareja determinada de ser elegida?

b) Halla la probabilidad que tiene Ana de ser elegida.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las dos inspectoras se encargue del asunto?

2. En un I.E.S. hay matriculados en 4º de E.S.O. 18 chicos y 20 chicas, de los que la tercera parte de ellos y la mitad de ellas están en el grupo A. Se elige un alumno al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un chico del grupo A?

b) Halla la probabilidad de que sea chico o esté en el grupo A.

c) Si el alumno elegido no está en el grupo A, ¿qué probabilidad hay de que sea chica?

3. En el país de Estados Amigos la pena de muerte está en vigor. A todos los condenados a la pena capital se les da la oportunidad de conmutarla por cadena perpetua de la siguiente forma: el reo ha de extraer una bola blanca de una de las dos urnas que se le dan para elegir: en una hay 2 bolas blancas y 1 negra, en la otra 2 blancas y 1 negra.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un condenado a muerte logre conmutar la pena?

b) Si un reo ha salvado la vida, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido la primera urna?

4. En un espacio de probabilidad dos sucesos tienen probabilidades 0'7 y 0'6, respectivamente, y la probabilidad de que no suceda alguno de ellos es 0'58. ¿Son sucesos dependientes o independientes?

Autoevaluación

1. Por comodidad, nombremos:

Ana = A , Mercedes = M , Juan = J , Luis = L y Pedro = P

a) Pueden formarse 10 parejas, así la probabilidad de cada pareja de ser elegida es $p=\frac{1}{10}$.

b) En este caso no hay ningún problema para escribir el espacio muestral:

$$E=\{AJ, AL, AM, AP, MJ, ML, MP, JL, JP, LP\}$$

Como vemos son 10 parejas las posibles, llegando a la conclusión anterior.

c) Vemos en E que hay cuatro casos favorables al suceso (Ana puede formar pareja con sus cuatro compañeros). Por la Regla de Laplace:

$$p('Ana\ es\ elegida')=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

d) Basta contar las parejas en las que ninguna de ellas está y aplicar la Regla de Laplace:

$$p('Ninguna\ es\ elegida')=\frac{3}{10}$$

2. Completamos la siguiente tabla, en la que resumimos la distribución por sexo y por grupos:

	Chico	***Chica***	
A	6	10	16
No A	12	10	22
	18	20	38

Ahora basta mirar en la tabla para hallar:

a) $p(Chico\cap A)=\frac{6}{38}$

b) Es la probabilidad de una unión:

$$\begin{aligned} p(Chico\cup A) &= p(Chico)+p(A)-p(Chico\cap A) \\ &= \frac{18}{38}+\frac{16}{38}-\frac{6}{38}=\frac{28}{38} \end{aligned}$$

c) *Método 1*: directo, consultando en la tabla:

$$\begin{aligned} p(Chica/'No A') &= \frac{chicas\ de\ 'no\ A'}{total\ de\ alumnos\ de\ 'no\ A'} \\ &= \frac{10}{22} \end{aligned}$$

Método 2: fórmula de probabilidad condicionada:

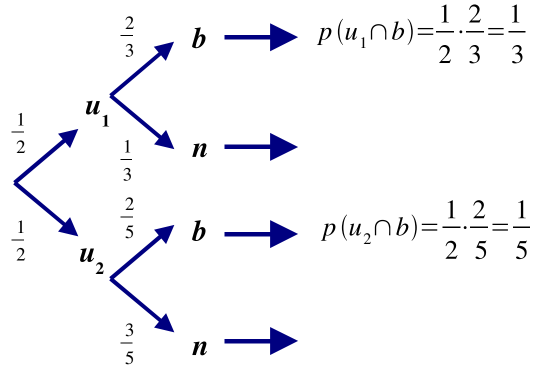
$$\begin{aligned} p(Chica/'No A') &= p\frac{(Chica\cap 'No A')}{p('No A')} \\ &= \frac{10/38}{22/38}=\frac{10}{22} \end{aligned}$$

3. Esquemáticamente, llamemos:

u_1 = "elige la urna 1" u_2 = "elige la urna 2"

b = "sale bola blanca" n = "sale bola negra"

El diagrama de árbol de la prueba es:



a) La probabilidad de que salve la vida es la de que salga bola blanca:

$$p(b)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}\approx 0'53$$

También: por el teorema de probabilidad total:

$$\begin{aligned} p(b) &= p(b/u_1)\cdot p(u_1)+p(b/u_2)\cdot p(u_2) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{8}{15} \end{aligned}$$

b) Es una probabilidad a posteriori:

$$p(u_1/b)=\frac{p(b\cap u_1)}{p(b)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=\frac{5}{8}$$

También: por la fórmula de Bayes

$$\begin{aligned} p(u_1/b) &= \frac{p(b/u_1)\cdot p(u_1)}{p(b/u_1)\cdot p(u_1)+p(b/u_2)\cdot p(u_2)} \\ &= \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{5}{8} \end{aligned}$$

4. Sean A y B los sucesos, de manera que:

$$p(A)=0'7 \text{ y } p(B)=0'6$$

Hemos de averiguar si es o no:

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B) \qquad (*)$$

Observemos que el suceso “no ocurre alguno de ellos” ($\bar{A}\cup\bar{B}$) es el contrario de “ocurren los dos sucesos” ($A\cap B$). Así, por la probabilidad del suceso contrario:

$$p(A\cap B)=1-0'58=0'42$$

Por otro lado, es:

$$p(A)\cdot p(B)=0'7\cdot 0'6=0'42$$

Como ambos coinciden, los sucesos cumplen la igualdad (*), y por ello son sucesos independientes.