TEMA 4

CÁLCULO DE DERIVADAS

Contenidos

1. Función derivada.
2. Derivadas sucesivas.
3. Derivadas elementales.
4. Álgebra de derivadas.
5. La Regla de la Cadena.
6. Continuidad y derivabilidad.

Tiempo estimado

16 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Conocer el concepto de derivada de una función en un punto.
2. Identificar a partir de la expresión analítica o gráfica de una función los puntos donde ésta es derivable y los puntos donde no lo es.
3. Conocer el concepto de función derivada.
4. Conocer las derivadas de las funciones polinómicas, potenciales, exponenciales, logarítmicas, seno y coseno.
5. Reconocer la relación entre continuidad y derivabilidad.
6. Saber estudiar la derivabilidad de una función, particularmente las definidas a trozos partiendo de funciones elementales.

1.Función derivada.

Derivada en un punto.

Decimos que f es derivable en $x = a$ si el límite siguiente existe:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

En ese caso, al límite anterior se le llama derivada de la función f para el valor *a*, y se le designa por $f'(a)$.

¡Atención! Puede ocurrir que dicho límite no exista. En ese caso diremos que f no es derivable en x_0.

☞ Ejemplo: hallemos la derivada de la función $f(x)=3x$ en $x = 2$.

Calculemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0} \frac{3\cdot(2+h)-6}{h}=\lim_{h\to 0} \frac{3h}{h}=\lim_{h\to 0} 3=3$$

Así, es $f'(2)=6$.

☞ Ejemplo: obtengamos la derivada de la función $f(x)=x^2$ en $x = 5$.

Calculemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim_{h\to 0} \frac{(5+h)^2-25}{h}=\lim_{h\to 0} \frac{h^2+10h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+10)=10$$

Obtén tú la derivada en x = 3

Así, es $f'(5)=10$.

Notación.

Existen multitud de símbolos para designar a la derivada de una función en un punto. Pero de ellos son tres los más usados.

Para designar a la derivada de la función $f(x)=x^2$ en $x = 5$:

Notación usual: $f'(5)=10$

Notación de operador: $Df(5)=10$

Notación diferencial: $\frac{df}{dx}(5)=10$

Esta última se lee "la derivada de f respecto de x en $x = 5$ es 8". Es una notación debida al matemático y filósofo Leibniz. Es la más compleja a la hora de escribir, pero también es la más completa y la que da más información.

En las Ciencias Experimentales es la más usada, ya que resume perfectamente qué es la derivada e indica cuáles son todas las variables. Por ejemplo, en la función $e=10t+3$ la expresión $v(3)=\frac{de}{dt}(3)=10$ nos señala que la velocidad es la derivada del espacio recorrido (e) respecto del tiempo (t).

Inicialmente se definió la derivada como el cociente de dos números (diferenciales) infinitamente pequeños pero que no eran cero. Era el difícil y oscuro concepto de los números infinitesimales.

❑ Función derivada.

En muchas ocasiones es necesario conocer la derivada de una función en varios de sus puntos. Consideremos, por ejemplo, la función $f(x)=x^2$. Si deseamos calcular $f'(-5)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(2)$ y $f'(8)$, en lugar de calcular estas derivadas aplicando la definición punto a punto, es preferible obtener una fórmula general:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x$$

Tenemos así que:

$$f'(x)=2x$$

Ahora, para hallar la derivada en cualquiera de sus puntos basta con sustituir en la fórmula anterior. Y observemos que esa fórmula define una función, que a cada valor de x le asocia la derivada de f para dicho valor de x.

Se llama función derivada de la función f a la definida mediante

$$x\rightarrow f'(x)$$

para aquellos valores en los que es posible el cálculo, y se la designa por f'.

☞ Ejemplo: comprueba que la función derivada de $f(x)=2x$ es la definida por $f'(x)=2$.

2. Derivadas sucesivas

La derivada f' es una función y, a su vez, puede intentar derivarse. A la función derivada de f' se la llama derivada segunda de f y se la designa por f''.

A una función f podemos asociarle, derivando sucesivamente, las funciones f', f'', f''', etcétera. A éstas se les llama derivadas sucesivas de f.

$$f \overset{D}{\rightarrow} f' \overset{D}{\rightarrow} f'' \overset{D}{\rightarrow} f''' \ \ldots$$

☞ Ejemplo: es fácil comprobar que

$$f(x)=x^2 \overset{D}{\rightarrow} f'(x)=2x \overset{D}{\rightarrow} f''(x)=2$$

3. Derivadas elementales

En la resolución de multitud de problemas es necesario conocer la derivada de las funciones que aparecen en el planteamiento y posterior resolución. Es por ello conveniente disponer de unas reglas que permitan derivar directamente las funciones que más se presentan en el Cálculo, para no tener que acudir continuamente a hallar cocientes incrementales y tomar límites en ellos.

Veremos los casos más elementales, dejando de lado la demostración de las fórmulas.

❑ Función constante.

La derivada de una función constante en cada punto es cero:

$$f(x)=k \overset{D}{\rightarrow} f'(x)=0$$

Abreviadamente:

$Dk=0$

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x)=3$, su función derivada es constantemente cero: $f'(x)=0$.

❑ Función potencial.

La derivada de la función potencial viene dada por:

$$f(x)=x^n \overset{D}{\rightarrow} f'(x)=n x^{n-1}$$

Abreviadamente:

$Dx^n=n\cdot x^{n-1}$

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x)=x^4$, su derivada es $f'(x)=4x^3$.

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x)=x^3$, su derivada es $f'(x)=3x^2$.

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x)=x$, su derivada es $f'(x)=1$.

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x)=x^2$, hallemos la derivada para $x = 4$:

Derivamos: $f(x)=x^2 \overset{D}{\rightarrow} f'(x)=2x$.

Sustituimos: $f'(4)=2\cdot 4=8$

☞ Ejemplo: Para derivar $f(x)=\sqrt{x^5}$ podemos proceder así:

$$D\left(\sqrt{x^5}\right)=D\left(x^{\frac{5}{2}}\right)=\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$$

❑ Funciones radicales.

Para derivar la función definida por una raíz cuadrada:

$$f(x)=\sqrt{x} \overset{D}{\rightarrow} f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Abreviadamente:

$D\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

El ejemplo siguiente muestra cómo derivar una raíz que no sea cuadrada.

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x)=\sqrt[3]{x^5}$, para obtener su derivada podemos proceder así:

$$D\left(\sqrt[3]{x^5}\right)=D\left(x^{\frac{5}{3}}\right)=\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

❑ Función exponencial.

La derivada de la función exponencial es la misma función exponencial:

$$f(x)=e^x \overset{D}{\rightarrow} f'(x)=e^x$$

Abreviadamente:

$De^x=e^x$

❑ Función logaritmo.

La derivada de la función logaritmo neperiano viene dada por:

$$f(x)=\ln x \xrightarrow{D} f'(x)=\frac{1}{x}$$

Abreviadamente:

$$D\ln x=\frac{1}{x}$$

❑ Funciones trigonométricas.

La derivada de la función seno es la función coseno:

$$f(x)=\operatorname{sen} x \xrightarrow{D} f'(x)=\cos x$$

La derivada de la función coseno es la opuesta de la función seno:

$$f(x)=\cos x \xrightarrow{D} f'(x)=-\operatorname{sen} x$$

Abreviadamente:

$D\operatorname{sen} x=\cos x$

$D\cos x=-\operatorname{sen} x$

4.Álgebra de derivadas

❑ Derivada de una suma o resta.

La derivada de una suma (resta) es igual a la suma (resta) de las derivadas de los términos que intervienen:

$$D(f\pm g)=f'\pm g'$$

☞ Ejemplo:

$$D\left(x^3-x^2+5\right)=D\left(x^3\right)-D\left(x^2\right)+D(5)=3x^2-2x$$

☞ Ejemplo: La derivada de la función $f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x$ es la función

$$f'(x)=\cos x-\operatorname{sen} x$$

❑ Derivada de un producto.

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda más la primera por la derivada de la segunda:

$$D(f\cdot g)=f'\cdot g+f\cdot g'$$

☞ Ejemplo: obtengamos la siguiente derivada:

$$D(x\operatorname{sen} x)=1\cdot\operatorname{sen} x+x\cdot\cos x=\operatorname{sen} x+x\cos x$$

☞ Ejemplo: calculemos $y'(1)$ para la función dada por $y=x\ln x$.

Derivamos y sustituimos:

$$y'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1 \quad\rightarrow\quad y'(1)=\ln 1+1=1$$

Derivada del producto de una constante por una función.

Estamos ante un caso particular del anterior, que es más simple:

La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función:

$$D(k\,f)=k\,f\,'$$

☞ Ejemplo: calculemos

$$D(5\ln x)=5\,D(\ln x)=5\cdot\frac{1}{x}=\frac{5}{x}$$

- Ejemplo: calculemos

$$D(5x^2+10x-5)=10x+10$$

☞ Ejemplo: Si el espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $e(t)=8t+5t^2$, $0\leq t\leq 10$, la velocidad en cada instante es

$$v(t)=e\,'(t)=8+10t \quad , \quad 0\leq t\leq 10$$

Derivada de un cociente.

La derivada de un cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador, todo ello dividido por el cuadrado del denominador:

$$D\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f\,'\cdot g-f\cdot g\,'}{g^2}$$

☞ Ejemplo: Calculemos

$$D\left(\frac{x^3}{x-2}\right)=\frac{(x^3)'\cdot(x-2)-x^3\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{3x^2\cdot(x-2)-x^3\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^3-6x^2}{(x-3)^2}$$

☞ Ejemplo: Calculemos

$$D\left(\frac{x^2}{x-3}\right)=\frac{2x\cdot(x-3)-x^2\cdot 1}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$$

☞ Ejemplo: Dada $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$ obtengamos su derivada para $x = 0$.

Primero derivamos el cociente:

$$f\,'(x)=\frac{1\cdot\cos x-x\cdot(-\mathrm{sen}\,x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos x+x\,\mathrm{sen}\,x}{(\cos x)^2}$$

Y ahora sustituimos en la derivada obtenida:

$$f\,'(0)=\frac{1+0}{1^2}=1$$

5. Regla de la Cadena

Aún nos falta una regla que nos permita obtener la derivada de una composición de funciones. Por ejemplo, ¿cómo hallar la función derivada de $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ o de $f(x)=\text{sen}(x^2)$?

Recordemos que dadas dos funciones *u* y *v*, la función compuesta $f=u\circ v$ queda definida mediante

$$f(x)=u[v(x)]$$

El siguiente resultado, que permite derivar talas funciones, tiene una demostración bastante complicada. Nosotros nos limitaremos a conocer cómo se aplica en la práctica con las funciones elementales que estamos estudiando.

Aquí tenemos la denominada **regla de la cadena**, que necesitaremos para derivar composiciones de funciones elementales:

Sean u y v dos funciones derivables. Si

$$f(x)=u[v(x)]$$

entonces f es derivable en cada x de su dominio y se tiene que es

$$f'(x)=u'[v(x)]\cdot v'(x)$$

☞ Ejemplo: para derivar $f(x)=\text{sen}(x^2)$, observamos que es una composición. Por la regla de la cadena:

$$f'(x)=\cos(x^2)\cdot 2x=2x\cos(x^2)$$

☞ Ejemplo: si $f(x)=\sqrt{\text{sen}\,x}$ su derivada es

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\text{sen}\,x}}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen}\,x}}$$

☞ Ejemplo: si $f(x)=\cos(e^x)$ su derivada es

$$f'(x)=-\text{sen}(e^x)\cdot e^x=-e^x\,\text{sen}(e^x)$$

☞ Ejemplo: si $f(x)=\ln(x^2+3x-2)$, aplicando la regla de la cadena

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+3x-2}\cdot(2x+3)=\frac{2x+3}{x^2+3x-2}$$

☞ Ejemplo: si $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, aplicando la regla de la cadena

$$f'(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

6. Continuidad y derivabilidad

La mayoría de las funciones que nos encontramos son derivables en todos valores en los que están definidas. Pero también nos encontramos con funciones que no tienen derivada en determinados valores especiales (singularidades). Para analizar si una función tiene derivada o no en un punto concreto, que puede ser problemático, conviene previamente estudiar su continuidad.

Y es que hay una estrecha relación entre la continuidad y la derivabilidad de una función en valor o punto concreto.

La siguiente propiedad de las derivadas nos será de gran utilidad:

> Sea una función f definida para $x = a$.
>
> Se cumple:
>
> $$f \text{ es derivable en } x = a \rightarrow f \text{ es continua en } x = a$$

En la práctica usaremos esta propiedad a través del llamado contra-recíproco:

f no es continua en $x = a$

$\downarrow$

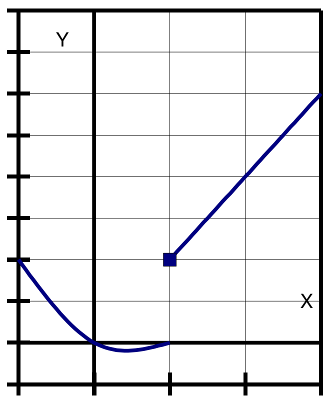
f es no es derivable en $x = a$

☞ Práctica: Cuando tengamos una función construida con trozos de funciones elementales derivables, podremos derivar directamente en todos los puntos que no sean los de conexión de los trozos.

Pero deberemos estudiar detenidamente la derivabilidad en los puntos de conexión de las funciones definidas a trozos. Comenzaremos, siempre, estudiando primero la continuidad en ellos.

☞ Ejemplo: Estudiemos la derivabilidad de la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & \text{si} \quad x<1 \\ 2x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$



y obtengamos su función derivada:

Como está construida con trozos de funciones derivables, podemos derivar directamente para $x \neq 1$:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x<1 \\ 2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Ahora, en el punto de conexión, detenidamente:

$\boxed{x=1}$

Continuidad:

VALOR: si $x=1$ es $y=2$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\rightarrow 1- \quad \text{es} \quad y=x^2-x\rightarrow 0 \\ \text{si} \quad x\rightarrow 1+ \quad \text{es} \quad y=2x\rightarrow 2 \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

Derivabilidad:

Como no es continua, no puede ser derivable en $x = 1$.

Pero si nos sale que la función es continua en $x = a$, ¿entonces qué? Pues ocurre que puede ser derivable para ese valor o puede no serlo. La siguiente propiedad nos será de gran ayuda:

Si una función f es continua para $x = a$ y derivable para $x \neq a$, equivalen:

- f es derivable en $x = a$.
- Los límites laterales de la derivada $f'(x)$ en $x = a$ coinciden.

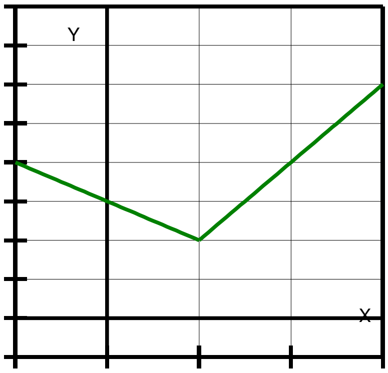
En cuyo caso, la derivada $f'(x)$ es ese límite común.

Esos límites laterales de la derivada se designan por:

$f'(a-)$ y $f'(a+)$

☞ Ejemplo: Estudiemos la derivabilidad de la función, obteniendo su función derivada:

$$f(x)=\begin{cases} 3-x & \text{si} \quad x<1 \\ 2x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$



Como está construida con trozos de funciones derivables, podemos derivar directamente para $x\neq 1$:

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<1 \\ 2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Ahora, en el punto de conexión, detenidamente:

$\boxed{x=1}$

Continuidad:

VALOR: si $x=1$ es $y=2$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y=3-x\to 2 \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y=2x\to 2 \end{cases}$

Concluimos que f es continua en $x = 1$.

Derivabilidad:

Como f es continua, puede ser derivable:

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y'=-1\to -1 \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y'=2\to 2 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que no es derivable en este valor.

Cuando una función es continua pero no derivable en un valor, se dice que tiene un **punto anguloso**.

☞ Ejemplo: Estudiemos la derivabilidad de la función

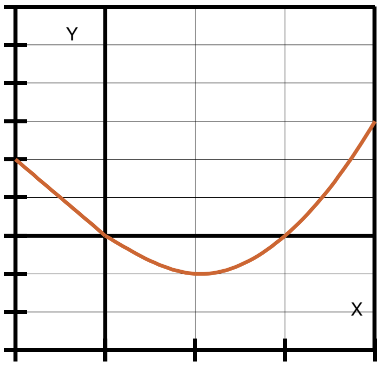
$$f(x)=\begin{cases} -2x & \text{si} \quad x<0 \\ x^2-2x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

y obtengamos su función derivada:

Como está construida con trozos de funciones derivables, podemos derivar directamente para $x\neq 0$:

$$f'(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad x<0 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Ahora, en el punto de conexión, detenidamente:



$\boxed{x=0}$

<u>Continuidad</u>:

VALOR: si $x=0$ es $y=0$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 0- \quad \text{es} \quad y=-2x\to 0 \\ \text{si} \quad x\to 0+ \quad \text{es} \quad y=x^2-2x\to 0 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 0$.

<u>Derivabilidad</u>:

Como f es continua, puede ser derivable:

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 0- \quad \text{es} \quad y'=-2\to -2 \\ \text{si} \quad x\to 0+ \quad \text{es} \quad y'=2x-2\to -2 \end{cases}$

Como coinciden concluimos que es derivable en este valor, siendo entonces $f'(0)=-2$.

Resumiendo:

$$f'(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad x<0 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Ejercicios

1. Consideremos la función f definida por

$$f(x)=3x-1$$

Comprueba, a partir de la definición de derivada, que es $f'(x)=3$ para todo valor de x.

2. Obtén las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:

a) $f(x)=x^2-5x+4$ b) $f(x)=x^4-7x-10$

c) $f(x)=x^3-9x+1$ d) $f(x)=3x^2-5x+1$

e) $f(x)=x^4+3x^2-9$ f) $f(x)=x^2+x+1$

3. Halla las derivadas sucesivas de la función

$$f(x)=x^3+4x^2-8x+3$$

4. Dada la función $f(x)=x^2+5x-3$, halla los valores $f(2)$, $f'(2)$ y $f''(2)$

5. Consideremos $f(x)=x^2+bx+c$.

Sabiendo que es $f(1)=2$ y $f'(0)=-2$, halla b y c.

6. En la función $f(x)=x^3+ax^2+bx-3$, se sabe que su gráfica pasa por el punto $(1,-3)$ y que es $f''(0)=2$. ¿Cuál es el valor de a y de b?

7. Halla la función derivada de:

a) $f(x)=x^2\cdot e^x$ b) $f(x)=x\sqrt{x}$

c) $f(x)=x^3\operatorname{sen}x$ d) $f(x)=x^3\ln x$

e) $f(x)=e^x\cdot\cos x$ f) $f(x)=(2x+1)e^x$

8. Deriva los siguientes cocientes:

a) $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x+2}$ b) $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2+1}$

c) $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x+2}$ d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4x}$

e) $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x+2}$ f) $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x+2}$

g) $f(x)=2/x$ h) $f(x)=3/x^2$

9. Obtén $f'(0)$, siendo:

a) $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$ b) $f(x)=\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}x}$

c) $f(x)=\dfrac{x-e^x}{x+e^x}$ d) $f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x+\cos x}$

e) $f(x)=\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}$ f) $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)}$

10. Deriva las siguientes funciones, usando convenientemente la Regla de la Cadena:

a) $f(x)=\operatorname{sen}(x^2+1)$ b) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

c) $f(x)=\ln(x^2+x)$ d) $f(x)=\cos(x+e^x)$

e) $f(x)=e^{\operatorname{sen}x}$ f) $f(x)=e^{x^2-1}$

11. Deriva las siguientes funciones, usando convenientemente la Regla de la Cadena:

a) $f(x)=\operatorname{sen}(2x+4)$ b) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

c) $f(x)=\ln(x^2-5x)$ d) $f(x)=e^{\cos x}$

e) $f(x)=\cos(e^x-x)$ f) $f(x)=e^{2x}$

12. Halla las derivadas sucesivas, hasta la de cuarto orden, de la función

$$f(x)=x\cdot e^x$$

Intenta encontrar la fórmula de la llamada "función derivada *n*-ésima": $f^{(n)}(x)$

Ídem para

$$f(x)=e^{3x}$$

13. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ x+2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Dibuja la gráfica de la función.

b) Estudia algebraicamente su continuidad.

c) ¿Es derivable la función para $x = 1$?

d) Halla la función derivada y calcula los valores $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$

14. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ x-1 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ x-x^2 & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad y su derivabilidad

b) Halla la función derivada

c) Halla $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, $f'(2)$

15. [S/97] Dadas las siguientes funciones

$f(x)=3x^6-\ln x$ $\qquad g(t)=\dfrac{5t^4-3}{t^3}$

$h(x)=\sqrt{1-x^2}$ $\qquad p(x)=4x\,e^{3x}$

calcula

a) $f'(2)$ b) $g'(1)$
c) $h'(0)$ d) $p'(0)$

16. [S/97] Se ha estudiado la evolución de la ganancia y en pesetas, en cada instante desde un tiempo inicial, hasta pasados 5 años, por la fabricación de un determinado producto y se ha modelizado funcionalmente dicha evolución así:

Durante el primer año: $y=2t^2$

Durante el segundo y tercer años: $y=4t-2$

Durante el resto: $y=e^{3-t}$

a) Construye la gráfica que muestra la evolución de la ganancia.

b) Estudia la continuidad y derivabilidad..

17. [S/97] Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 10+\frac{5}{2}x & \text{si} \quad x\le -2 \\ x^2+1 & \text{si} \quad -2<x<2 \\ 10-\frac{5}{2}x & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

a) Representa la gráfica de *f*.

b) Estudia la continuidad y derivabilidad en $x=2$ y $x=-2$.

c) Calcula, donde exista, la función derivada de f y represéntala gráficamente.

18. [S/97] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 3-x & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ x+a & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

donde "a" es un parámetro real.

a) Calcule el valor de a para que f sea continua en $x=2$.

b) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f cuando $a=3$.

c) Dibuje la gráfica de la función que se obtiene cuando $a=2$.

19. [S/98] Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{2x^3}{\cos x}$

b) $g(x)=\dfrac{2}{3}\ln(5x)$

c) $h(x)=\dfrac{1}{2}e^{5x-3}$

20. [S/98] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\le 0 \\ -x^2+4x & \text{si} \quad 0<x<4 \\ (x-4)^3+1 & \text{si} \quad x\ge 4 \end{cases}$$

a) Represéntela gráficamente.

b) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.

c) Obtenga los valores $f'(1)$ y $f'(5)$.

21. [S/99] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<-1 \\ \dfrac{4}{x+3} & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ 1+\ln x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Estudie su continuidad.

b) Estudie la derivabilidad, obteniendo la función derivada.

c) Calcule, si es posible, $f'(0)$ y $f'(2)$.

22.[S/99] Calcule las funciones derivadas de las siguientes funciones, simplificando su expresión cuando sea posible:

a) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x^3}$ para $x\neq 0$.

b) $g(x)=\dfrac{1}{3}\ln(4x)$ para $x>0$.

c) $h(x)=\cos x\cdot \operatorname{sen} x$ para $x\in\mathbb{R}$

23.[S/99] Siendo $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1<x\leq 3 \\ (x-4)^2+2 & \text{si} \quad x\geq 3 \end{cases}$$

a) Represéntela gráficamente.

b) Estudie la continuidad de la función.

c) Estudie la derivabilidad de *f*.

24.[S/00] Calcule la derivada de cada una de las funciones siguientes:

$$g(x)=\frac{-1}{x} \quad , \quad h(x)=x\operatorname{sen} x$$

25.[S/00] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si} \quad x\leq -1 \\ -x^2+2 & \text{si} \quad -1<x\leq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Calcule el valor de "*a*" para que f sea continua en $x=-1$.

b) Represente gráficamente la función si es $a = 3$

c) Justifique la existencia o no de derivada en los puntos $x=-1$ y $x=1$ para la función obtenida en el apartado anterior.

26.[S/00] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-2}{x+1} & \text{si} \quad x<-2 \\ -x^2-2x+a & \text{si} \quad -2\leq x<0 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) Halle el valor de a para que f sea continua. Para dicho valor de a, ¿es f derivable?

b) Para el caso de $a = 2$, dibuje la gráfica de *f*.

27.[S/01] Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{\mathrm{L}\,x}{x^2}$

b) $g(x)=(1-x^3)\cos x$

c) $h(x)=4x^3-5x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

28.[S/01] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2 & \text{si} \quad x\leq -2 \\ a & \text{si} \quad -2<x\leq 2 \\ x & \text{si} \quad x>2 \end{cases} \qquad (a\in\mathbb{R})$$

a) Calcule el valor de "*a*" para que f sea continua en $x=-2$.

b) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f cuando $a = 2$

c) Represente gráficamente la función anterior cuando $a = 2$.

29.[S/01] Determine los valores que han de tomar "*a*" y "*b*" para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} 4x+b & \text{si} \quad x<1 \\ ax^2+6x-7 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

sea derivable.

30.[S/02] Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} 5 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ x^2-6x+10 & \text{si} \quad 2<x\leq 5 \\ 4x-15 & \text{si} \quad x>5 \end{cases}$$

a) Represéntela gráficamente.

b) Estudie su continuidad y derivabilidad.

31.[S/02] Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{5x}}{x^3-1}$

b) $g(x)=4x\cdot L(3x+1)$

c) $h(x)=(x^2-1)\cdot(x^3+2x)$

d) $p(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$

32.[S/02] Dada $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-3 & \text{si} \quad x<1 \\ 2bx-4 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$

a) Determine los valores que han de tomar "*a*" y "*b*" para que sea derivable.

b) Represente su gráfica para $a=1$ y $b=2$.

33.[S/02] Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 3x-3 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ x^2-6x+11 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Represéntela gráficamente.

b) Estudie su continuidad y su derivabilidad.

c) ¿Existe algún punto donde la derivada sea nula?

34.[S/03]

a) Halle a y b para que sea continua y derivable en el valor $x=2$ la función

$$f(x)=\begin{cases} -(x-1)^2+b & \text{si} \quad x\leq 2 \\ a(x-3)^2+3 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

b) Halle la derivada de $g(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$

35.[S/03] Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1<x\leq 2 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad para los valores $x=1$ y $x=2$.

b) Represéntela gráficamente.

36.[S/03] Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} -4x-3 & \text{si} \quad x\leq -1 \\ 2x^2-1 & \text{si} \quad -1<x<1 \\ \dfrac{k+2}{x} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

a) Calcule el valor que debe tomar k para que la función sea continua en todo punto, y estudie su derivabilidad para el valor de k obtenido.

b) Dibuje la gráfica de la función para $k=-1$.

37.[S/04]

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+7 & \text{si} \quad x\leq 3 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

b) Calcule la derivada de

$$g(x)=(x+1)\cdot e^{2x+1}$$

38.[S/04] Calcule las funciones derivadas de las siguientes (no es necesario simplificar el resultado):

a) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x}-(5x-x^2)^2$

b) $g(x)=(x^2-1)\cdot L\,x$

c) $h(x)=2^{5x}$

d) $i(x)=(x^3-6x)\cdot(x^2+1)^3$

39.[S/05] Sea f la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+bx+3 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Determine los valores que deben tener a y b para que f sea derivable.

40.[S/05] Halle $f'(2)$, $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma

$$f(x)=x^2+\frac{16}{x^2}\ ;\ g(x)=(x^2+9)^3\ ;\ h(x)=L(x^2+1)$$

41.[S/06] Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x}+(5x-2)^3$

b) $g(x)=(x^2+2)\cdot L(x^2+2)$

c) $h(x)=3^{5x}+e^x$

42.[S/06] Calcule $g''(2)$ siendo $g(x)=\dfrac{1}{x}-x$

43.[S/07]

a) Sea $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+a & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x^2+bx+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Halle a y b para que la función sea continua y derivable.

b) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x)=\frac{3}{(2x+5)^2}+L(1-x) \quad , \quad h(x)=\frac{e^x}{x^3+1}$$

44.[S/07] Calcule g'(3), siendo $g(x)=2x\cdot e^{3x-1}$

45.[S/07] Para $g(x)=e^{1-x}+L(x+2)$, calcule $g'(1)$.

46.[S/07] Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-k}{x+1} & \text{si} \quad x>0 \\ x^2+2x+1 & \text{si} \quad x\leq 0 \end{cases}$$

a) Calcule el valor de k para que la función f sea continua en x = 0. Para ese valor de k , ¿es f derivable en x =0?

b) Para k = 0, calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Cuestiones

1. Escribe una función que tenga la misma derivada en todos sus puntos.
2. Da un ejemplo de tres funciones diferentes que tengan la misma derivada.
3. La función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ es la derivada de una función $F(x)$. ¿Cuál?
4. Escribe dos funciones cuya derivada sea función dada por $y=\cos x$.
5. Escribe una función que sea idéntica a su función derivada.
6. ¿Es posible que una función sea discontinua en un punto y derivable en él?
7. ¿Es posible que una función sea continua en un punto y no derivable en él?
8. La función valor absoluto $y=|x|$:

   a) Dibuja su gráfica formando una tabla de valores con x = –2, –1, 0 , 1 , 2.

   b) A la vista de ella decide si es continua y si es derivable en x = 0.

Autoevaluación

1. Obtén la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3x^4 e^x$

b) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-1}$

c) $f(x)=2x\,\mathrm{sen}\,x$

d) $f(x)=\dfrac{5x}{\ln x}$

2. Deriva con la "regla de la cadena":

a) $y=\cos(x^2+x)$

b) $y=2^{x^2-3x}$

c) $y=\ln(x^2+3x-5)$

d) $y=\sqrt{x^2+5x}$

e) $y=3x^4\cdot\mathrm{sen}(2x-1)$

3. Obtén $y'''(0)$ siendo:

a) $y=x^3-5x^2+8x-3$

b) $y=e^{2x}$

4. De la función $y=x^3+ax^2-bx$ se sabe que pasa por el punto $(1,-3)$ y que en él se anula su derivada.

¿Cuáles son los valores de a y de b?

5. Dada $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si} \quad x\le 0 \\ x & \text{si} \quad 0<x<1 \\ 3-x & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad.

b) Estudia su derivabilidad.

c) Dibuja su gráfica.

6. Se sabe que la función

$$f(x)=\begin{cases} x+\cos x & \text{si} \quad x\le 0 \\ x+a & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

es continua en todo punto.

a) Averigua el valor de a.

b) Halla la derivada de f.

Autoevaluación

1.

a) Derivamos un producto:

$$f'(x)=12x^3e^x+3x^4e^x=e^x(12x^3+3x^4)$$

b) Derivamos un cociente:

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x^2-1)-2x\cdot(2x+1)}{(x-1)^2}$$

Simplificando:

$$f'(x)=\frac{-2x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

c) Derivamos un producto:

$$f'(x)=2\,\mathrm{sen}\,x+2x\cos x$$

d) Derivamos un cociente:

$$f'(x)=\frac{5\cdot\ln x-\frac{1}{x}\cdot 5x}{(\ln x)^2}$$

Simplificando:

$$f'(x)=\frac{5\cdot\ln x-5}{(\ln x)^2}$$

2.

a) Es la derivada de un coseno:

$$\begin{aligned} y' &= -\mathrm{sen}(x^2+x)\cdot(2x+1)\\ &= -(2x+1)\,\mathrm{sen}(x^2+x)\end{aligned}$$

b) Es la derivada de una exponencial:

$$\begin{aligned} y' &= 2^{x^2-3x}\cdot(\ln 2)\cdot(2x-3)\\ &= (\ln 2)\cdot(2x-3)\cdot 2^{x^2-3x}\end{aligned}$$

c) Es la derivada de un logaritmo:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x^2+3x-5}\cdot(2x+3)\\ &= \frac{(2x+3)}{x^2+3x-5}\end{aligned}$$

d) Es la derivada de una raíz:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+5x}}\cdot(2x+5)\\ &= \frac{(2x+5)}{2\sqrt{x^2+5x}}\end{aligned}$$

e) Es la derivada de un producto:

$$y'=12x^3\,\mathrm{sen}(2x-1)+6x^4\cos(2x-1)$$

3.

a) Hallamos las derivadas sucesivas:

$$\begin{gathered} y=x^3-5x^2+8x-3\\ \downarrow\\ y'=3x^2-10x+8\\ \downarrow\\ y''=6x-10\\ \downarrow\\ y'''=6\end{gathered}$$

Y sustituimos la x de la derivada tercera por 0. En este caso, al ser constante:

$$y'''(0)=6$$

b) Hallamos las derivadas sucesivas:

$$y=e^{2x}\to y'=2e^{2x}\to y''=4e^{2x}\to y'''=4e^{2x}$$

Ahora sustituimos x en la derivada tercera por 0:

$$y'''(0)=4$$

4.

Observemos antes de nada que es:

$$y=x^3+ax^2-bx \quad\to\quad y'=3x^2+2ax-b$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} y(1)=-3 &\quad\to\quad 1+a-b=-3\\ y'(1)=0 &\quad\to\quad 3+2a-b=0\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema resultante obtenemos:

$$a=1\ ,\ b=5$$

5.

a) Al ser una función polinómica a trozos, sólo puede ser discontinua $x = 0$ y en $x = 1$. Veamos detenidamente:

$\boxed{x=0}$:

V: si $x=0$ es $y=0$

T: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 0- \quad \text{es} \quad y=x^2+2x\to 0\\ \text{si} \quad x\to 0+ \quad \text{es} \quad y=x\to 0\end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 0$.

$\boxed{x=1}$:

V: si $x=1$ es $y=2$

T: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y=x\to 1 \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y=3-x\to 2 \end{cases}$

Concluimos que no es continua: hay una discontinuidad de salto finito para $x = 1$.

b) Derivamos directamente:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ 1 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ -1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Estudiemos detenidamente la derivabilidad para $x=0$ y en $x=1$:

$\boxed{x=0}$:

Como f es continua puede ser derivable. Veamos las derivadas laterales:

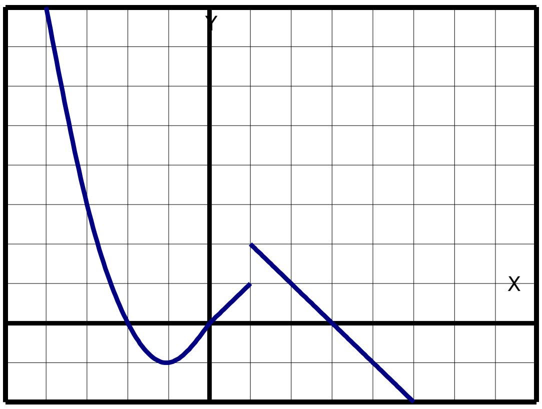
$\begin{cases} \text{si} \quad x\to 0- \quad \text{es} \quad y'=2x+2\to 2 \\ \text{si} \quad x\to 0+ \quad \text{es} \quad y'=1\to 1 \end{cases}$

Como las derivadas laterales no coinciden, tenemos que f no es derivable para $x = 0$ (es un punto *anguloso*).

$\boxed{x=1}$:

Como f es discontinua tenemos que f no puede ser derivable en este valor.

c) Su gráfica se compone de un trozo de parábola $(y=x^2+2x)$ y de dos trozos de recta $y=x$, $y=3-x$:



6. Los datos del problema son:

a) Al ser una función continua en todo punto, es continua en $x = 0$:

V: si $x=0$ es $y=2$

T: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 0- \quad \text{es} \quad y=x+\cos x\to 1 \\ \text{si} \quad x\to 0+ \quad \text{es} \quad y=x+a\to a \end{cases}$

De ahí obtenemos igualando que es $a = 1$.

b) Derivamos directamente:

$$f'(x)=\begin{cases} 1-\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x<0 \\ 1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Estudiemos detenidamente la derivabilidad para $x = 0$:

Como f es continua en este valor puede ser derivable. Veamos los derivadas laterales:

$\begin{cases} \text{si} \quad x\to 0- \quad \text{es} \quad y'=1-\operatorname{sen} x\to 1 \\ \text{si} \quad x\to 0+ \quad \text{es} \quad y'=1\to 1 \end{cases}$

Como las derivadas laterales coinciden, tenemos que f es derivable para $x = 0$, siendo $f'(0)=1$.

En definitiva:

$$f'(x)=\begin{cases} 1-\operatorname{sen} x & \text{si} \quad x<0 \\ 1 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$$