TEMA 3

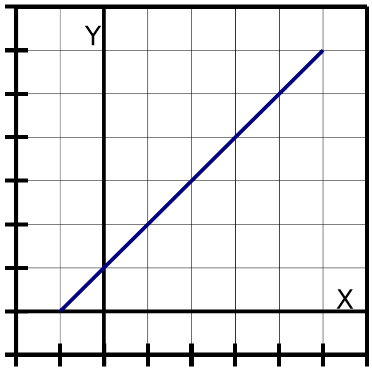
PROGRAMACIÓN LINEAL

Contenidos	Criterios de Evaluación
1. Inecuaciones lineales. 2. Sistemas de inecuaciones lineales. 3. Planteamiento de un problema de optimización. 4. Método analítico para la obtención de soluciones. 5. Interpretación geométrica del objetivo. 6. Enunciado general. Número de soluciones. Tiempo estimado 12 sesiones	1. Interpreta en el plano las soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas y usar el vocabulario adecuado. 2. Conoce los conceptos y propiedades necesarios para operar correctamente con desigualdades. 3. Resuelve sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas. Determinar los vértices del recinto y dibujarlo. 4. Conoce la terminología básica de la programación lineal. 5. Resuelve problemas de programación lineal de dos variables, procedentes de diversos ámbitos, pro métodos analíticos y gráficos.

1.Inecuaciones lineales

En este tema vamos a aprender a resolver problemas de programación lineal bidimensionales. Para ello deberemos conocer a fondo las inecuaciones con dos incógnitas.

Partamos de la ecuación $y=x+1$. Si representamos todos los pares de números (x,y) que verifican dicha ecuación obtendremos la recta r dibujada a la derecha. Tenemos que cada punto de la recta es una solución de la ecuación.



Por ejemplo: $(4,3)\in r \rightarrow 4=3+1$.

Veamos qué significado geométrico tendrá la inecuación $y\geq x+1$.

Observa que todos los puntos situados sobre la recta y "por encima" de ella son soluciones de la inecuación:

$(1,2)$ es solución, pues $2\geq 1+1$

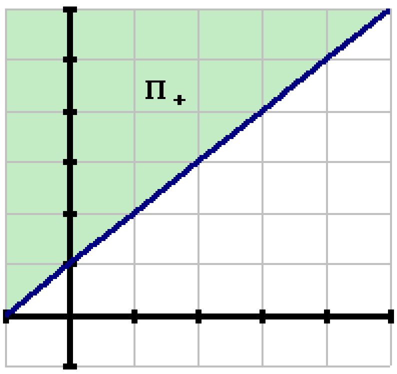
$(2,5)$ es solución, pues $5\geq 2+1$

$(1,3)$ es solución, pues $3\geq 1+1$

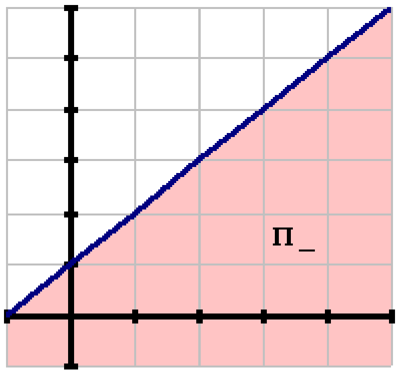
$(-1,1)$ es solución, pues $1\geq -1+1$

Si representamos todas las soluciones obtendremos el semiplano superior Π_+ determinado por la recta (incluida ésta).

Análogamente, la inecuación $y\leq x+1$ tiene como solución todos los puntos del semiplano inferior Π_- determinado por la recta (incluida ésta).



$y \geq x+1$

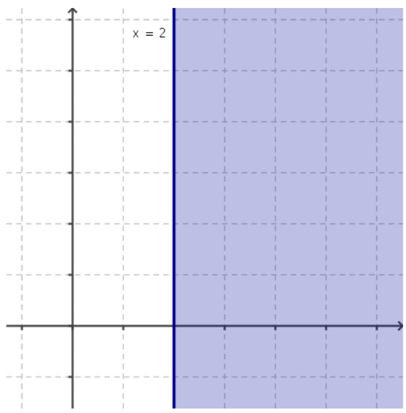


$y \leq x+1$

Consideremos ahora un caso especial: ¿cuál es el conjunto de los puntos del plano que verifican la desigualdad $x\geq 2$?

Observemos que se trata de los puntos cuya abscisa – x – es mayor o igual que 2.

Es claro que lo verifican todos los puntos que están a la derecha de la recta vertical $x=2$:



En general:

La solución de una inecuación de dos incógnitas $ax+by+c\geq 0$ es un semiplano determinado por la recta $ax+by+c=0$, incluida ésta.

A una inecuación lineal también se la denomina restricción.

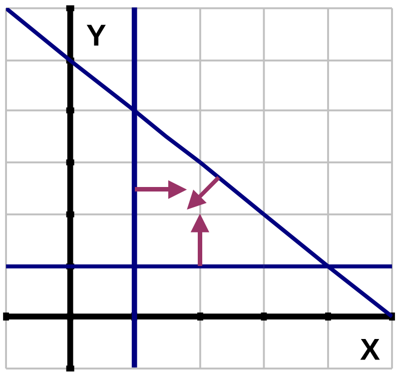
Para resolver una inecuación de dos incógnitas $Ax+By+C\geq 0$, podemos proceder de la siguiente forma: despejamos la variable y o la variable x y tenemos en cuenta lo siguiente:

$y\geq ax+b$	semiplano superior a	$y=ax+b$
$y\leq ax+b$	semiplano inferior a	$y=ax+b$
$x\geq cy+d$	semiplano derecho a	$x=cy+d$
$x\leq cy+d$	semiplano izquierdo a	$x=cy+d$

2.Sistemas de inecuaciones

Veamos cómo proceder partiendo de un caso concreto: resolvamos el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 1 \\ x+y\leq 5 \end{cases}$$

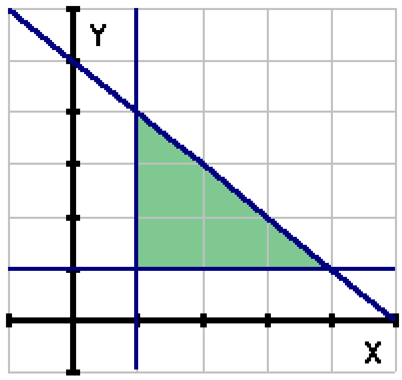


Resolver ese sistema es obtener el conjunto de puntos (x,y) del plano que cumplen las tres desigualdades anteriores.

Observemos cómo traducir las desigualdades:

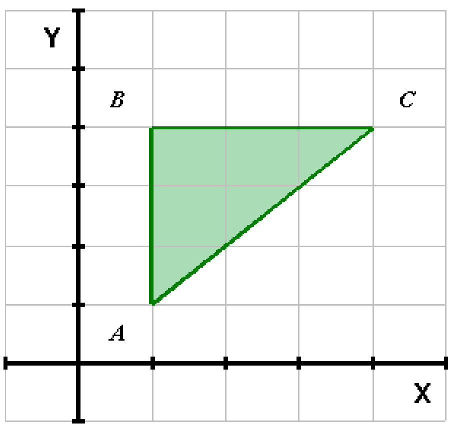
$x\geq 1$	semiplano derecho determinado por la recta	$x=1$
$y\geq 1$	semiplano superior determinado por la recta	$y=1$
$y\leq 5-x$	semiplano inferior determinado por la recta	$y=5-x$

Ahora representamos esos semiplanos y observamos qué puntos están en los tres a la vez; esto es, los puntos comunes a todos los semiplanos.



En la imagen de arriba apreciamos que la solución del sistema es el recinto señalado. Como vemos, el recinto es un polígono de tres lados: un triángulos. ¿Sabrías decir cuáles son sus vértices?

Vamos ahora a resolver el problema recíproco: determinar un sistema de inecuaciones cuya solución sea el siguiente recinto del plano:



☞ Primero obtendremos las ecuaciones de sus lados:

Lado AB: $x=1$

Lado BC: $y=4$

Lado AC: $y=x$

☞ Ahora nos fijamos en qué semiplanos está contenido el recinto:

Semiplano derecho de $x=1$ ($x\geq 1$)

Semiplano inferior de $y=4$ ($y\leq 4$)

Semiplano superior de $y=x$ ($y\geq x$)

- El recinto es el determinado por el conjunto de restricciones siguientes:

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ y\leq 4 \\ y\geq x \end{cases}$$

Si la recta r

- pasa por el punto $A=(x_0, y_0)$
- tiene pendiente $m=\frac{\Delta x}{\Delta y}$

su ecuación es

$$y=y_0+m(x-x_0)$$

3.Planteamiento de un problema

❑ Problema 1.

En una urbanización se van a construir casas de dos tipos: A y B. La constructora dispone para ello de un máximo de 18 millones de euros, siendo el coste de cada tipo de casa 300.000 y 200.000 euros, respectivamente.

Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de una casa tipo A es de 40.000 € y de 30.000 € por una de tipo B, ¿cuántas casas deben construirse de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Vamos a ver a través de dos ejemplos cómo son los problemas de optimización y cómo plantearlos, llegando a una expresión algebraica de ellos que permita aplicar métodos matemáticos que conduzcan a su resolución.

- En primer lugar leeremos atentamente el problema y anotaremos esquemáticamente todos los datos (los cantidades son miles de euros):
  - ✔ Límite para el gasto: 18.000
  - ✔ Características de las casas:

	Gasto	***Beneficio***	***¿Número?***
Tipo A	300	40	x
Tipo B	200	30	y

  - ✔ El beneficio obtenido debe ser máximo.
- Traducimos ahora todos esos datos y condiciones al lenguaje algebraico:
  - ✔ El beneficio está en función del número de casas (x e y) edificadas:

$$b=40x+30y$$

  - ✔ Las incógnitas x e y no pueden tomar valores cualesquiera: están sometidas a unas restricciones:

No pueden ser cantidades negativas → $x\geq 0$, $y\geq 0$

Es *gasto* ≤ 18000 → $300x+200y\leq 18000$

- Concluimos:
  - ✔ **Objetivo**: maximizar $b=40x+30y$
  - ✔ **Restricciones**: $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 300x+200y\leq 18000 \end{cases}$

❑ Problema 2.

Una agencia de viajes tiene 10 autobuses y de 50 plazas y 20 microbuses de 30 plazas. Ha de programar un viaje para 400 personas y el día que quieren salir dispone de 10 conductores como máximo.

Cuando se utiliza un autobús el presupuesto de gasto es de 600 euros, mientras que en el caso del microbús es de 450 euros.

¿Cuántos vehículos deben utilizar de cada clase para que el gasto sea mínimo?

- En primer lugar leeremos atentamente el problema y anotaremos esquemáticamente todos los datos:
  - ✔ Características de los vehículos:

	Hay	***Plazas***	***Gasto***	***¿Número?***
Autobuses	10	50	600	x
Microbuses	20	30	450	y

  - ✔ El número de conductores es, a lo sumo 10.
  - ✔ El número de plazas debe ser al menos 400.
  - ✔ El gasto ocasionado debe ser mínimo.
- Ahora expresemos todos esos datos y condiciones algebraicamente:
  - ✔ El gasto está en función del nº de vehículos (*x* e *y*) que se utilizan:

$$g=600x+450y$$

  - ✔ Las incógnitas x e y no pueden tomar valores cualesquiera: están sometidas a unas restricciones:

El nº de autobuses no puede ser negativo ni puede superar a 10:

$$0\leq x\leq 10$$

El nº de microbuses no puede ser negativo ni puede superar a 20:

$$0\leq y\leq 20$$

Como hay un máximo de 10 conductores, la cantidad total de vehículos usados será, como máximo, 10:

$$x+y\leq 10$$

El nº de plazas que se consiguen deber ser de 400 como mínimo:

$$50x+30y\geq 400$$

- Concluimos:
  - ✔ **Objetivo**: minimizar $g=60x+45y$
  - ✔ **Restricciones**: $\begin{cases} 0\leq x\leq 10 \\ 0\leq y\leq 20 \\ x+y\leq 10 \\ 50x+30y\geq 400 \end{cases}$

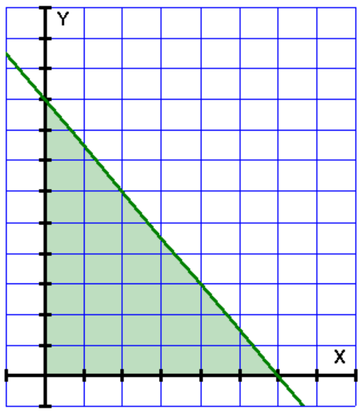
4.Obtención de soluciones.

Vamos ahora a dar respuesta a los problemas anteriores:

❑ Problema 1

Tratamos de averiguar cuándo la función objetivo $b=4x+3y$ es máxima, sabiendo que x e y verifican las restricciones

$$x\geq 0 \quad , \quad y\geq 0 \quad , \quad 30x+20y\leq 1.800$$



En el margen hemos representado la solución del sistema de inecuaciones anterior (con escala 10 en cada eje).

Se trata de un polígono convexo (un triángulo). La solución es un punto con coordenadas enteras de ese recinto. Para hallarlo podríamos calcular el valor de *b* en todos ellos:

$$\begin{array}{lcl} (x,y)=(30,20) & \rightarrow & b=4\cdot 30+3\cdot 20=180 \\ (x,y)=(20,50) & \rightarrow & b=4\cdot 20+3\cdot 50=230 \\ (x,y)=(60,0) & \rightarrow & b=4\cdot 60+3\cdot 0=240 \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Disponemos de una propiedad que nos facilitará mucho la labor:

> Dada una función lineal $f=ax+by+c$ y una región R que es convexa acotada:
>
> 1. La función f tiene un valor máximo y un valor mínimo en R.
> 2. Esos valores extremos se alcanzan algunos de sus vértices.

Tan sólo es preciso obtener:

$$\begin{array}{lcl} (x,y)=(0,2) & \rightarrow & b=4\cdot 0+3\cdot 0=0 \\ (x,y)=(60,0) & \rightarrow & b=4\cdot 60+3\cdot 0=240 \\ (x,y)=(0,90) & \rightarrow & b=4\cdot 0+3\cdot 90=270 \end{array}$$

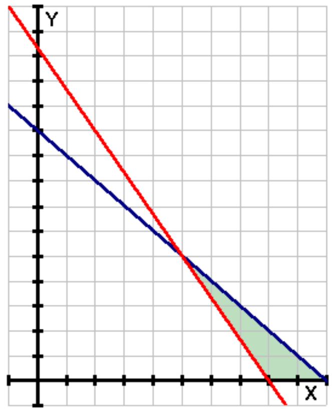
Tenemos que b alcanza su valor máximo en R para $(x,y)=(0,90)$.

- **<u>Conclusión</u>**: para obtener el máximo beneficio deben construirse 90 casas tipo B y ninguna del tipo A.

❑ Problema 2

Tratamos de averiguar cuándo la función objetivo $g=60x+45y$ es mínima, sabiendo que x e y verifican las restricciones

$$\begin{cases} 0\le x\le 10 \\ 0\le y\le 20 \\ x+y\le 10 \\ 50x+30y\ge 400 \end{cases}$$



En el margen hemos representado la solución del sistema de inecuaciones anterior. Se trata de un triángulo R :

Observemos ahora que al ser g una función lineal y R un recinto convexo y acotado, el valor mínimo se alcanzará en uno de sus vértices:

$$(x,y)=(5,5) \quad\rightarrow\quad b=60\cdot 5+45\cdot 5=525$$
$$(x,y)=(8,0) \quad\rightarrow\quad b=60\cdot 8+45\cdot 8=480$$
$$(x,y)=(10,0) \quad\rightarrow\quad b=60\cdot 10+45\cdot 0=600$$

Tenemos que g alcanza su valor mínimo en R para $(x,y)=(8,0)$.

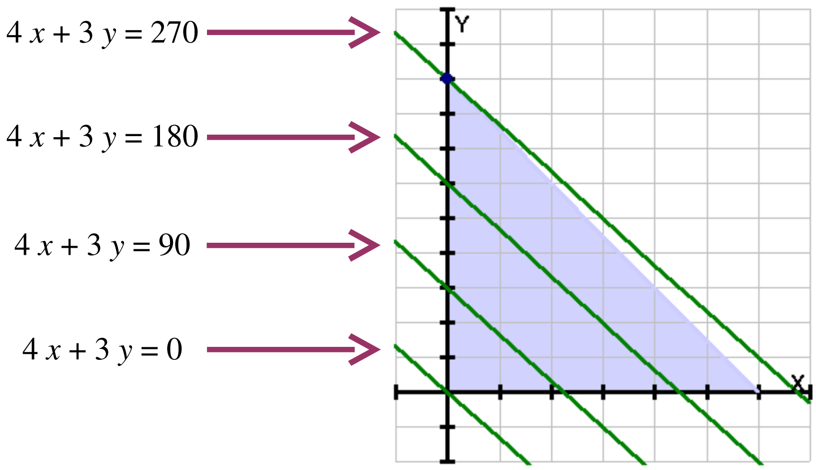
- **<u>Conclusión</u>**: para conseguir el mínimo gasto deben usarse ocho autobuses y ningún microbús.

5.Interpretación geométrica

En los problemas anteriores hemos resuelto el problema de optimización de modo algebraico.

Pero también puede resolverse e interpretarse la solución de modo gráfico. Para ello representamos sobre el conjunto solución rectas de la forma $f(x,y)=k$, donde f es la función objetivo. A continuación se observa el valor de k que nos proporciona la solución.

Concretemos: veamos cómo puede interpretarse de forma gráfica la función objetivo a través del problema 1:



Fijémonos en que:

- Todas las rectas 4x+3y = k son paralelas.
- Cuanto mayor es k “más arriba” está la recta.

Observa la traducción:

Geométrico	Analítico
$4x+3y=0$ pasa por $(0,0)$	En $(0,0)$ el beneficio es 0
$4x+3y=90$ pasa por $(0,30)$	En $(0,30)$ el beneficio es 90
$4x+3y=180$ pasa por $(30,20)$	En $(30,20)$ el beneficio es 180
$4x+3y=270$ pasa por $(0,90)$	En $(0,90)$ el beneficio es 270
...	...
$4x+3y=k$ pasa por P	En P el beneficio es k

El beneficio máximo se alcanzará sobre una recta $4x+3y=k$ en la que sea k lo mayor posible y que pase por algunos de los puntos de la región determinada por las restricciones.

Encuentra tú la solución del problema 2 siguiendo el método geométrico sugerido.

- Esto sugiere un método geométrico para encontrar esa solución:
  - ✔ Dibujar la recta $4x+3y=0$
  - ✔ Trazar la paralela a ella más alta posible que pase por algún punto del recinto.

6.Enunciado general

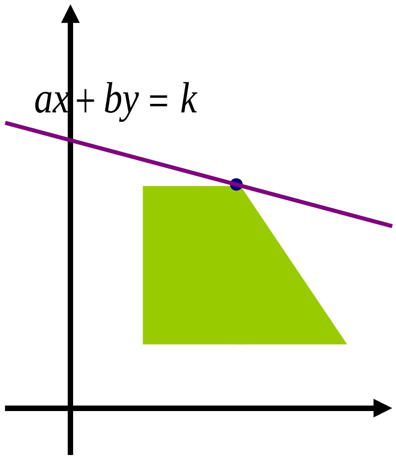
❑ Planteamiento general de un problema bidimensional.

En un problema de **programación lineal** con dos variables se trata **optimizar** (maximizar o minimizar) una función de la forma

$$z = ax+by$$

En esta función, llamada **función objetivo**, las variables x e y se hallan sometidas a un sistema de desigualdades lineales

$$\begin{cases} a_1 x+b_1 y\leq c_1 \\ \dots \\ a_n x+b_n y\leq c_n \end{cases}$$



Éstas desigualdades se denominan normalmente **restricciones**.

Los puntos del plano que satisfacen cada desigualdad forman un semiplano. Los que satisfacen todas las desigualdades están en un recinto convexo (acotado o no) del plano. Dicha región se denomina **región de validez**, y a cada uno de sus puntos se les llama **soluciones factibles**.

La solución factible que haga máxima o mínima la función objetivo se denomina **solución óptima**.

❑ Existencia de soluciones.

En programación lineal de dos variables contamos con el siguiente resultado, que ya conocemos, y que es de gran ayuda:

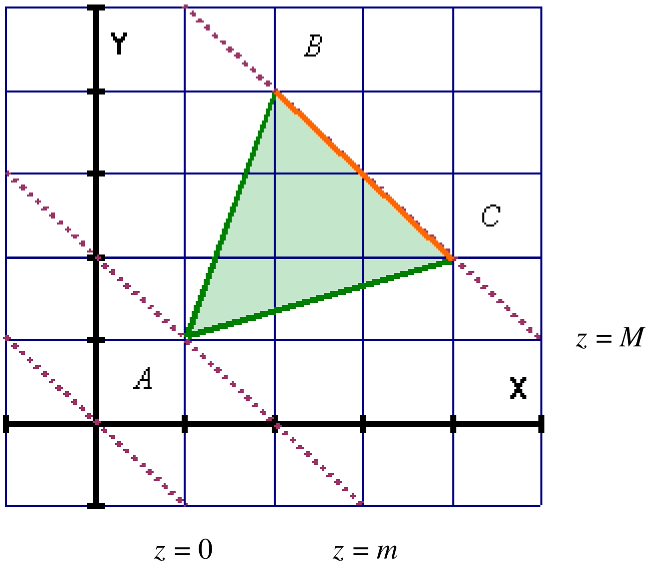
> Dada una función lineal $f = ax + by + c$ y una región R que es convexa acotada:
>
> 1. La función f tiene un valor máximo y un valor mínimo en R.
> 2. Esos valores extremos se alcanzan algunos de sus vértices.

❑ Número de soluciones.

En los problemas que hemos resuelto nos hemos encontrado con que tenían solución, y que era única. ¿Ocurre así en todos los problemas de programación lineal?

Veremos a continuación que un problema de programación lineal puede tener una solución, varias, ninguna o infinitas.

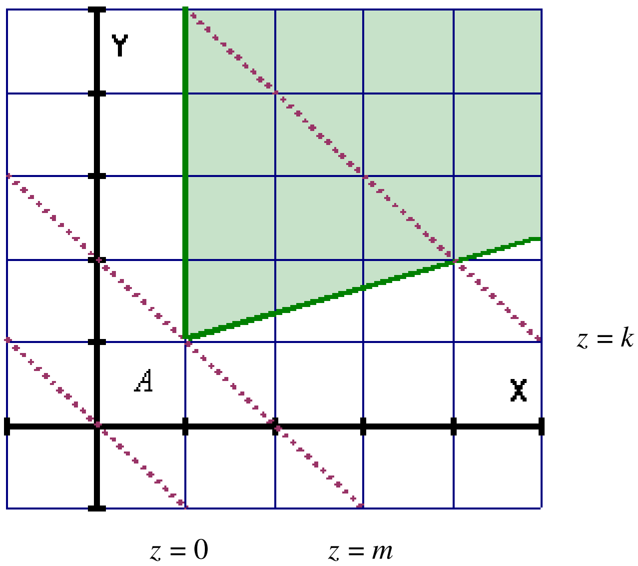
☞ Ejemplo 1: Consideremos el conjunto factible siguiente, en el que se ha representado la recta $z = 0$, donde z es la función objetivo:



- Si nuestro objetivo es minimizar z observemos que la solución es única: z alcanza su valor mínimo $z = m$ en el vértice $A = (1, 1)$.
- Si nuestro objetivo es maximizar z observemos que hay infinitas soluciones: z alcanza su valor mínimo $z = M$ en todos los puntos del segmento $\overline{BC}$.
- Sin embargo, si z sólo pudiera tomar valores enteros, entonces habría exactamente tres puntos en los que alcanzaría su valor máximo:

$$B = (2, 4) \ , \ C = (4, 2) \ \text{y} \ (x, y) = (3, 3)$$

☞ Ejemplo 2: Consideremos el conjunto factible siguiente, en el que se ha representado la recta $z = 0$, donde z es la función objetivo:



Observemos que el recinto de la izquierda es convexo, pero no es acotado.

Por eso no hay un valor máximo. Pero como sí hay mínimo, se alcanzará en un vértice.

- Si nuestro objetivo es minimizar z observemos que la solución es única: z alcanza su valor mínimo $z = m$ en el vértice $A = (1, 1)$.
- Si nuestro objetivo es maximizar z observemos que no hay solución: al no estar acotado superiormente el recinto, z no alcanza nunca ningún valor máximo. Vamos a continuación a estudiar ciertas propiedades que tienen los determinantes. Recordemos que se refieren siempre a matrices cuadradas.

Ejercicios

1. [S/97]Cada mes una empresa puede gastar, como máximo, un millón de pesetas en salarios y un millón ochocientas mil pesetas en energía (electricidad y gasóleo). La empresa sólo elabora dos tipos de productos A y B. Por cada unidad de A que elabora gana 80 Pta. y 50 Pta. por cada unidad de B. El coste salarial y energético que acarrea la elaboración de una unidad del producto A y una del B aparece en la siguiente tabla:

	A	***B***
Coste salarial	200	100
Coste energético	100	300

Se desea determinar cuántas unidades de cada uno de los productos A y B debe producir la empresa para que el beneficio sea máximo.

2. [S/97]En un problema de programación lineal la región factible es el pentágono convexo que tiene de vértices los puntos cuyas coordenadas son

$$O(0,0) \ , \ P(0,4) \ , \ R\left(\frac{5}{2},2\right) \ \text{y} \ S\left(\frac{11}{4},0\right)$$

y la función objetivo que hay que maximizar es $F(x,y)=2x+ay$ (a es un número real positivo).

a) Dibuja la región factible.

b) Halla el punto del mismo en el que la función objetivo alcanza el máximo para $a=\frac{1}{2}$.

c) Encuentra el valor de a para que el máximo se alcance en el punto $(0,4)$.

3. [S/97]Consideremos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x+3y\leq 3 \\ 2x+y\leq 4 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

a) Dibujar el conjunto de puntos definido por las inecuaciones.

b) Maximizar, en dicho conjunto, la función objetivo $z=2x+3y$.

4. [S/97]Una fábrica de coches va a lanzar al mercado dos nuevos modelos (uno básico y otro de lujo). El coste de fabricación del modelo básico es de un millón de pesetas y el del modelo de lujo un millón y medio. Se dispone para esta operación de lanzamiento de un presupuesto de sesenta millones. Para evitar riesgos se cree conveniente lanzar al menos tantos coches del modelo básico como del modelo de lujo, y en cualquier caso no fabricar más de 45 coches del modelo básico.

a) ¿Cuántos coches interesa fabricar de cada modelo si el objetivo es maximizar el número de coches fabricados?

b) ¿Se agota el presupuesto disponible?

5. [S/97]Un vendedor dispone de dos tipos de pienso, A y B, para alimentar al ganado. Si mezcla a partes iguales los dos piensos obtiene una mezcla que vende a 15 Pta./Kg. y si la proporción en la mezcla es de una parte de A por 3 de B se vende la mezcla resultante a 10 Pta./Kg. El vendedor dispone de 100 Kg. de pienso del tipo A y de 210 del tipo B. Desea hacer las dos mezclas de forma que sus ingresos por venta sean máximos.

a) Plantea el problema y dibuja la región factible.

b) Halla cuántos kilogramos de cada mezcla deben producirse para maximizar los ingresos y calcular dicho ingreso.

6. [S/98] Un camión puede transportar, como máximo, 12 Tm. por viaje. En cierto viaje se desea transportar al menos, 5 Tm. de la mercancía A y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que se transporte de A. Sabiendo que cobra 4 Pta. por kilo de mercancía A y 3 Pta. por kilo de mercancía B transportadas, ¿cómo se debe cargar el camión para obtener la ganancia máxima?

7. [S/98]Un trabajador de una fábrica de envases de cartón hace cajas de dos tipos. Para hacer una caja del primer tipo, que se vende por 12 *pta*. gasta 2 *m* de cinta adhesiva y 0'5 m de rollo de papel de cartón. Para hacer una del segundo tipo, que se vende a 8 *pta*., gasta 4 *m*. de cinta adhesiva y 0'25 *m* del mismo rollo de papel de cartón.

Si dispone de un rollo de cinta adhesiva que tiene 440 *m* y otro rollo de papel de cartón de 65 *m*, ¿cuántas cajas de cada tipo deben hacerse para que el valor de la producción sea máximo?

8. [S/98] Determine los óptimos –máximo y mínimo– de la función objetivo

$$z = x - y$$

definida en la región determinada por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 6x + y \geq 3 \\ 2x + y \leq 2 \\ y \leq 2'5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

9. [S/98] Para abonar una parcela agrícola se necesitan, por lo menos, 8 kilos de nitrógeno y 12 Kg. de fósforo.

Se dispone de un producto A cuyo precio es de 30 Pta./Kg. y que contiene un 10% de nitrógeno y un 30% de fósforo. Existe en el mercado otro producto B que contiene un 20% de nitrógeno y un 20% de fósforo y cuyo precio es de 40 Pta./Kg.

¿Qué cantidad se debe tomar de A y de B para abonar la parcela con el menor costo posible sabiendo que, como máximo se pueden llevar a la parcela 60 Kg. de producto?

10. [S/98] En un almacén caben, a lo sumo, 60 contenedores. Para atender las demandas, el almacén debe disponer en cualquier momento de un mínimo de 30 contenedores de zumos y 20 de leche.

a) Almacenar un contenedor de zumo conlleva un gasto de 40 Pta. mientras que el de uno de leche asciende a 80 Pta.

b) Determine con qué número de contenedores de zumo y de leche se alcanza un gasto de almacenaje óptimo.

11. [S/98] Una finca se quiere dedicar a un cultivo de secano y a otro de regadío, de modo que entre los dos pueden ocupar, como máximo, 12 hectáreas y no pueden dedicarse al regadío más de 7 hectáreas.

El cultivo de secano tiene un coste de 100.000 Pta. por hectárea, el de regadío 200.000 Pta. por hectárea, y la suma de los costes no puede ser mayor de 1.600.000 pesetas.

Si la ganancia neta de una hectárea de secano es de 1.600.000 Pta. y la de regadío de 3.000.000 de pesetas, encuentre la distribución de cultivos que maximiza la ganancia y calcule este máximo.

12. [S/99] Represente gráficamente el recinto definido por las siguientes inecuaciones

$$2x + y \leq 1000 \ , \ x + 1'5y \leq 750 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0$$

Halle sus vértices y obtenga el valor máximo de la función $F(x, y) = 15x + 12y$ en el recinto anterior, así como el punto en que lo alcanza.

13. [S/99] Represente gráficamente el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones

$$x + y \leq 11 \ , \ 40x + 30y \geq 360 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0$$

Calcule los vértices de ese recinto y obtenga en dicho recinto el valor máximo y mínimo de la función dada por $F(x, y) = 10000x + 7000y$, y diga en qué puntos se alcanzan.

14. [S/99] Dibuje el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \leq 6 \ ; \ y \leq 8 \ ; \ x + 2y \geq 10 \ ; \ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0$$

Calcule sus vértices y calcule el máximo de la función $F(x, y) = 20x + 60y$ en dicho recinto.

15. [S/99] Un agricultor cosecha garbanzos y lentejas. Se sabe que, a lo sumo, sólo se pueden cosechar 500 Tm., de las que como máximo 200 Tm. son lentejas. Los beneficios por Tm. de garbanzos y lentejas son de 50.000 pta. y 30.000 pta. respectivamente, y desea planificar la producción para optimizar el beneficio total.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema y la función objetivo del mismo.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) ¿Cuántas Tm. de garbanzos y cuántas de lentejas debe cosechar para obtener el máximo beneficio?

16. [S/99] Dibuje el recinto limitado por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \leq 27 \quad , \quad x \geq 12 \quad , \quad y \geq 6$$

Determine los vértices del recinto. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 90x + 60y$ en el recinto anterior y en qué puntos se alcanzan dichos valores?

17. [S/99]Dibuje el recinto limitado por las siguientes inecuaciones:

$$x+y\geq 2\ ,\ x-y\leq 0\ ,\ y\leq 4\ ,\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0$$

Calcule los vértices de ese recinto y determine el valor máximo y el mínimo de la función $f(x,y)=12x+4y$ en el recinto anterior.

18.[S/00]

a) El triángulo limitado por las rectas

$$2x=7\ ,\ 5y-4x=11\ ,\ 2x+5y=17$$

representa la solución de cierto sistema de inecuaciones lineales. Determine ese sistema de inecuaciones

b) Calcule los puntos del recinto anterior en los que la función $F(x,y)=2x+7y$ alcanza sus valore máximo y mínimo.

c) Encuentre dichos valores máximo y mínimo.

19.[S/00]

a) Dibuje el recinto del plano definido por las inecuaciones

$$5x+y\leq 5\ ;\ 9y-2x\geq 0\ ;\ x+2y\geq 2\ ;\ x\geq 0$$

y determine sus vértices.

b) Determine, en ese recinto, los puntos donde la función $F(x,y)=6x+y-3$ toma los valores máximo y mínimo.

20.[S/00] La región factible de un problema de programación lineal es la intersección del primer cuadrante con los 3 semiplanos definidos por las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x}{10}+\frac{y}{8}\leq 1\ ,\ \frac{y}{5}+\frac{y}{8}\geq 1\ ,\ \frac{x}{10}+\frac{y}{4}\geq 1$$

a) Dibuje dicha región y determine sus vértices.

b) Calcule el mínimo de la función $F(x,y)=4x+5y$ en el recinto anterior.

21.[S/00]

a) Represente y calcule los vértices de la región determinada por las inecuaciones siguientes.

$$x\geq 0\ ,\ y\geq 0\ ,\ y-x\leq 2\ ,\ y-x\geq -1\ ,\ 2y+x\leq 7$$

b) Dada la función

$$f(x,y)=2x+3y$$

calcule su valor máximo en la región anterior y el punto donde lo alcanza.

22. [S/00] Sea el recinto definido por las inecuaciones

$$x\leq\frac{1}{3}(x+y)\ ,\ x+y\leq 18\ ,\ y\leq 15\ ,\ x\geq 0$$

a) Represente dicho recinto y determine sus vértices.

b) Halle el punto de éste donde se hace mínima la función .

$$F(x,y)=80x+100(15-y)$$

c) ¿Cuál es ese valor mínimo?

23.[S/00] Sea el recinto dado por las inecuaciones:

$$2y\geq x+3\ ,\ -y\geq -x\ ,\ x\leq 5$$

a) Represéntelo gráficamente.

b) Calcule sus vértices.

c) ¿En qué puntos del recinto alcanza la función $f(x,y)=-2x+y-1$ sus valores extremos?

24.[S/01] Para fabricar 2 tipos de cable, A y B, que se venderán a 150 y 100 Pta. el metro, respectivamente, se emplean 16 kg. de plástico y 4 kg. de cobre para cada Hm. (hectómetro) del tipo A y 6 kg. de plástico y 12 kg. de cobre para cada Hm. del tipo B.

Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo B no puede ser mayor que el doble de la del tipo A y que, además, no pueden emplearse más de 252 kg. de plástico ni más de 168 kg. de cobre, determine la longitud, en Hm., de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en su venta sea máxima.

25.[S/01] Cierta sala de espectáculos tiene una capacidad máxima de 1500 personas, entre adultos y niños; el número de niños asistentes no puede superar los 600. El precio de la entrada para una sesión de adulto es de 800 pts., mientras que la de un niño es de un 40% menos. El número de adultos no puede superar al doble del número de niños.

Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede recaudar por la venta de las entradas?

¿Cuántas entradas serán de niños?

26.[S/01] Se quiere organizar un puente aéreo entre dos ciudades, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar 1600 personas y 96 toneladas de equipaje. Los aviones disponibles son de dos tipos: 11 del tipo A y 8 del tipo B. La contratación de un avión del tipo A cuesta 4 millones de pts y puede transportar 200 personas y 6 toneladas de equipaje; la contratación de uno del tipo B cuesta 1 millón de pts y puede transportar 100 personas y 15 toneladas de equipaje.

¿Cuántos aviones de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo?

27.[S/01]Dado el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x+y & \leq & 18 \\ 2x+3y & \leq & 26 \\ x+y & \leq & 16 \\ x\geq 0 & ; & y\geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Represente gráficamente el recinto que define.

b) Calcule los vértices de ese recinto.

c) Obtenga en dicho recinto el valor máximo y el mínimo de la función $F(x,y)=5x+3y$.

Diga en que puntos se alcanzan.

28.[S/01] Sea el conjunto de restricciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y & \leq & 9 \\ x-y & \leq & 0 \\ x+2y & \leq & 16 \\ x & \geq & 0 \end{array}\right\}.$$

a) Dibuje la región factible determinada por dichas restricciones.

b) Calcule los vértices de dicha región.

c) Obtenga los puntos en los que la función objetivo $F(x,y)=x+2y$ presenta sus extremos.

29.[S/01] Sea el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} 5x+2y-10\geq 0 \\ x-y-2\leq 0 \\ 3x+4y-20\leq 0 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Dibuje dicho recinto y determine sus vértices.

b) Determine en qué punto de ese recinto alcanza la función $F(x,y)=4x+3y$ el máximo valor.

30.[S/02] Una fábrica de muebles dispone de 600 kg de madera para fabricar librerías de 1 y de 3 estantes. Se sabe que son necesarios 4 kg de madera para fabricar una librería de 1 estante, siendo su precio de venta 20 euros; para fabricar una librería de 3 estanterías se necesitan 8 kg de madera y el precio de venta de ésta es de 35 euros.

Calcule el número de librerías de cada tipo que se deben fabricar para obtener el máximo ingreso sabiendo que, por falta de otros materiales, no se pueden fabricar más de 120 librerías de 1 estante ni tampoco más de 70 de 3 estantes.

31.[S/02] Una persona desea adelgazar. En la farmacia le ofrecen dos compuestos A y B para que tome una mezcla de ambos en la comida, con las siguientes condiciones:

No debe tomar más de 150 g de mezcla, ni menos de 50 g.

La cantidad de A debe ser mayor o igual que la de B.

No debe incluir más de 100 g del compuesto A.

Se sabe que cada 100 g de A contienen 30 mg de vitaminas y cada 100 g de B contienen 20 mg de vitaminas.

a) Formule matemáticamente el conjunto de restricciones, dibuje la región factible y determine sus vértices.

b) ¿Cuántos gramos debe tomar de cada compuesto para obtener el preparado más rico en vitaminas?

32.[S/02] Una fábrica produce dos tipos de juguetes, muñecas y coches teledirigidos. La fábrica puede producir, como máximo, 200 muñecas y 300 coches. La empresa dispone de 1800 horas de trabajo para fabricas los juguetes y sabe que la producción de cada muñeca necesita 3 horas de trabajo y proporciona un beneficio de 10 euros, mientras que la de cada coche necesita 6 horas de trabajo y proporciona un beneficio de 15 euros.

Calcule el número de muñecas y de coches que han de fabricarse para que el beneficio global de la producción sea máximo y obtenga dicho beneficio.

33.[S/02] Consideremos el sistema formado por las siguientes inecuaciones:

$$x+y\leq 120\ ,\ \ 3y\leq x\ ,\ x\leq 100\ ,\ y\geq 10$$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

b) ¿En qué punto, o puntos, de esa región la función $F(x,y)=25x+20y$ alcanza el máximo?

34.[S/02] Un ahorrador dispone de 10000 euros para invertir en fondos de dos tipos: A ó B. La inversión en fondos A debe superar los 5000 euros y, además, debe doblar al menos a la inversión en fondos B.

La rentabilidad del pasado año de los fondos A ha sido del 2'7% y la de los B ha sido del 6'3%.

Suponiendo que la rentabilidad continúe siendo la misma, determine la inversión que obtendría el máximo beneficio y calcúlelo.

35.[S/02] Una empresa pastelera dispone semanalmente de 160 kg de azúcar y de 240 kg de almendra para hacer tortas de almendra y tabletas de turrón.

Se necesitan 150 g de almendra y 50 g de azúcar para hacer una torta de almendra y 100 g de almendra y 100 g de azúcar para cada tableta de turrón. El beneficio neto por la venta de cada torta es de 1'75 euros, y por cada tableta de turrón es de 1 euro.

Determine cuántas tortas de almendra y cuántas tabletas de turrón han de elaborarse para obtener la máxima ganancia.¿Cuál es el beneficio máximo semanal?

36.[S/03] Dado el sistema de inecuaciones

$$-5x+3y\leq 2\ \ ,\ \ -x+2y\geq 6\ \ ,2x+3y\leq 37$$

a) Represente la solución y determine sus vértices.

b) Halle el punto del recinto en el que la función $F(x,y)=-2x+5y$ alcanza su máximo.

37.[S/03] Una empresa gana 150 euros por cada Tm de escayola producida y 100 euros por cada Tm de yeso.

La producción debe ser como mínimo de 30 Tm de escayola y 30 Tm de yeso.

La cantidad de yeso no puede superar en más de 60 Tm a la de escayola.

El triple de la cantidad de escayola, más la cantidad de yeso, no puede superar 420 Tm.

Calcule la cantidad diaria que debe producirse de cada material para obtener la máxima ganancia, y determine dicha ganancia.

38.[S/03] Una empresa fabrica sofás de dos tipos, A y B, por los que obtiene un beneficio, por unidad, de 1500 y 2000 euros, respectivamente.

Al menos se deben fabricar 6 sofás del tipo A y 10 del tipo B, por semana, y además el número de los del tipo A no debe superar en más de 6 unidades al número de los del B.

¿Cuántas unidades de cada tipo se deben fabricar semanalmente para obtener beneficio máximo, si no se pueden fabricar más de 30 sofás semanalmente?

39.[S/03]

a) Dibuje la región delimitada por las siguientes inecuaciones, determinando sus vértices:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\geq 1\quad ,\quad y\leq x\quad ,\quad x\leq 2$$

b) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=-x+2y-2$ en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.

40.[S/03]

a) Represente gráficamente la región delimitada por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x+2y\geq 80\quad ,\quad 3x+2y\geq 160\quad ,\quad x+y\leq 70$$

b) Calcule el máximo y el mínimo de la función $F(x,y)=9x+8y-5$ en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.

41.[S/03] Una piscifactoría vende gambas y langostinos a 10 y 15 euros el kg, respectivamente.

La producción máxima mensual es una tonelada de cada producto y la producción mínima mensual es de 100 kg de cada uno.

Si la producción total es, a lo sumo, de 1700 kg al mes, ¿cuál es la producción que maximiza los ingresos mensuales? Calcule estos ingresos máximos.

42.[S/04]

a) Dibuje la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x-3y\geq -13 \\ 2x+3y\geq 17 \\ x+y\leq 11 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

b) Determine los vértices de este recinto

c) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=5x+6y$ en la región anterior e indique en qué puntos se alcanzan.

43.[S/04] Sea el sistema de inecuaciones

$$x+y\leq 6\ ,\ x-2y\leq 13\ ,\ x+3y\geq -3\ ,\ x\geq 0$$

a) Dibuje el recinto cuyos puntos son las soluciones del sistema y obtenga sus vértices.

b) Halle los puntos del recinto en los que la función $F(x,y)=x-2y$ toma los valores máximo y mínimo, y determine éstos.

44.[S/04] Calcule los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x,y)=3x+5y$ en el recinto del plano determinado por las inecuaciones

$$\begin{cases} 3x-2y\geq 10 \\ 2x+3y\leq 24 \\ x-5y\geq -1 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

45.[S/04] Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo que vende a 120 euros cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo. ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál será dicho ingreso?

46.[S/04] Una pastelería elabora dos tipos de trufas: dulces y amargas.

Cada trufa dulce lleva 20 g de cacao, 20 g de nata y 30 g de azúcar y se vende a 1 euro la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 g de cacao, 20 g de nata y 15 g de azúcar y se vende a 1.3 euros la unidad.

En un día la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10'5 kg de azúcar. Sabiendo que vende todo lo que elabora, calcule cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día para maximizar los ingresos, y calcule dichos ingresos.

47.[S/04]

a) Los vértices de un polígono convexo son

$$(1,1)\ ,\ (3,\frac{1}{2})\ ,\ (\frac{8}{3},\frac{5}{2})\ ,\ (\frac{7}{3},3)\ \text{y}\ (0,\frac{5}{3})$$

Calcule el máximo de la función objetivo

$$F(x,y)=x-2y$$

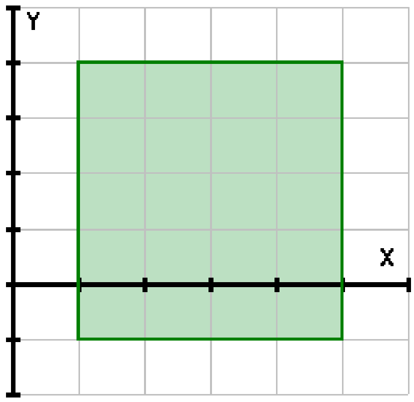
en la región delimitada por dicho polígono.

b) Dibuje el recinto del plano definido por las inecuaciones siguientes y determine sus vértices:

$$\begin{cases} x+2y\geq 6 \\ x-y\leq 1 \\ y\leq 5 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Cuestiones

1. Determina un sistema de inecuaciones que determinen el rectángulo de la figura:



2. Sin representar ninguna gráfica, ¿cómo averiguar si el punto $P(2,3)$ pertenece al semiplano determinado por $2x-y\geq 4$?

3. Representa el semiplano determinado por las inecuaciones siguientes:

a) $x\geq -2$

b) $y\leq 4$

4. Dado el semiplano $2x+3y\leq 5$, escribe las coordenadas de dos puntos que pertenezcan y de dos que no a él.

5. En un problema de programación lineal, ¿cómo se llama a la función que debe optimizarse?

6. Al representar las restricciones de un problema observamos que no hay ningún punto que las cumpla todas. ¿Cuál es la solución del problema?

7. ¿Qué es una solución factible en un problema de programación lineal?

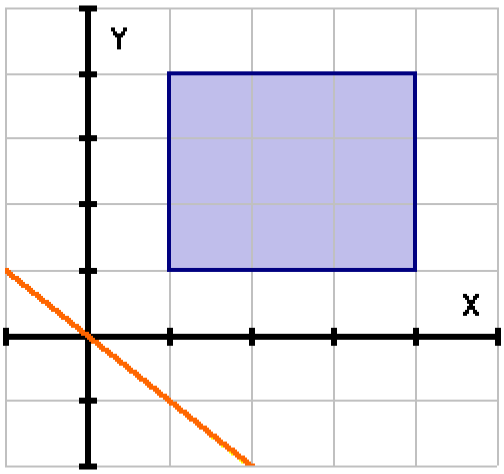
8. Pon un ejemplo de un problema de programación lineal sin soluciones factibles.

9. ¿Puede un problema de programación lineal tener infinitas soluciones óptimas? ¿Y ninguna?

10. Explica en qué situación un problema de programación lineal puede alcanzar su valor óptimo en un punto interior de la región factible.

11. ¿Puede una función objetivo representarse por una recta vertical? ¿Y por una horizontal?

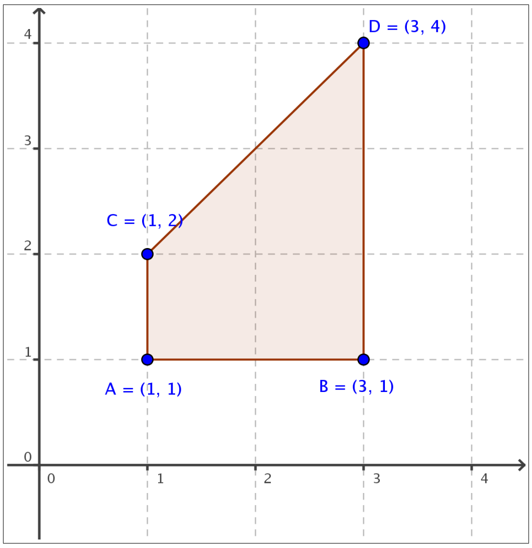
12. En la figura tienes la gráfica correspondiente a un problema de programación lineal. Resuélvelo:



$z = 0$

Autoevaluación

1. Construye un sistema de inecuaciones cuyo conjunto solución corresponda con el señalado en la figura adjunta (incluyendo los bordes):



2. Halla

$$z_1 = max\{12x + 4y\} \text{ y } z_2 = min\{12x + 4y\}$$

siendo x e y variables sujetas a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x \geq \dfrac{1}{2} \\ y \leq 4 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$$

3. Una empresa multinacional tiene dos refinerías de petróleo: la refinería A produce diariamente una tonelada de gasolina normal, dos de gasolina súper y cuatro de gasolina sin plomo; la refinería B produce diariamente dos toneladas de cada una de las tres clases de gasolinas.

La empresa necesita para su funcionamiento al menos 70 toneladas de gasolina normal, 130 de gasolina súper y 150 de gasolina sin plomo. Los gastos diarios de la refinería A ascienden a 1500 euros y a 2000 los de la B.

¿Cuántos días deberían trabajar cada refinería para obtener la gasolina que la empresa necesita con un coste mínimo? ¿Cuál es dicho coste?

4. Un almacenes desean comprar dos tipos de electrodomésticos, A y B. Cada unidad del tipo A cuesta 600 euros y cada unidad de B cuesta 1.000 euros. Dispone de 14.000 euros para la compra y de espacio en su almacén para un máximo de 20 electrodomésticos.

Sabiendo que su beneficio por unidad es del 20% del precio de compra, ¿cuántos electrodomésticos ha de combinar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Autoevaluación

1.

Primero obtendremos las ecuaciones de sus lados:

AC: $x=1$

BD: $x=3$

AB: $y=1$

CD: $\left.\begin{array}{l} m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2}{2}=1 \\ P=(1,2) \end{array}\right\} \rightarrow y=2+1\cdot(x-1)=x+1$

Ahora nos fijamos en qué semiplanos está contenido el recinto:

Semiplano derecho de $x=1$ $(\ x\geq 1\ )$

Semiplano izquierdo de $x=3$ $(\ x\leq 3\ )$

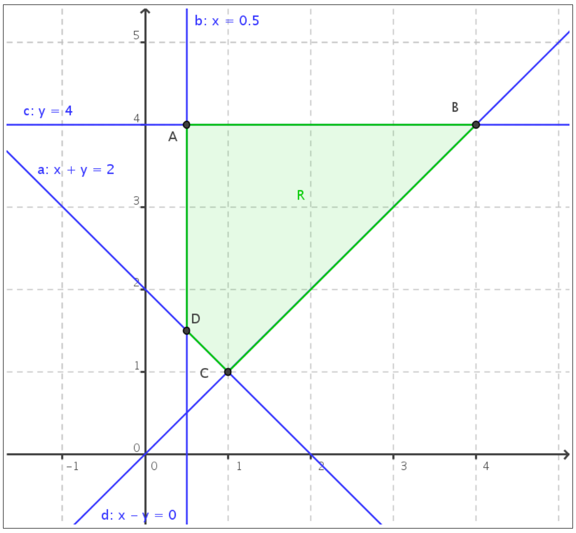
Semiplano superior de $y=1$ $(\ y\geq 1\ )$

Semiplano inferior de $y=x+1$ $(\ y\leq x+1\ )$

El recinto es el determinado por el conjunto de restricciones siguientes:

$$\begin{cases} 1\leq x\leq 3 \\ y\geq 5 \\ y\leq x+1 \end{cases}$$

2. Aquí hemos representado la solución del sistema de inecuaciones. Se trata de un cuadrilátero R :



Observemos ahora que al ser $z=12x+4y$ una función lineal y R un recinto convexo y acotado, los valores extremos se alcanzarán en sus vértices:

$$\begin{array}{lll} (x,y)=(0'5,4) & \rightarrow & z=12\cdot 0'5+4\cdot 4=22 \\ (x,y)=(4,4) & \rightarrow & z=12\cdot 4+4\cdot 4=64 \\ (x,y)=(1,1) & \rightarrow & z=12\cdot 1+4\cdot 1=16 \\ (x,y)=(0'5,0'5) & \rightarrow & z=12\cdot 0'5+4\cdot 1'5=12 \end{array}$$

Tenemos que:

$z_{max}=64$ y se alcanza en $B=(4,4)$

$z_{min}=12$ y se alcanza en $D=(0'5,1'5)$

3.

Leemos atentamente el problema y anotamos esquemáticamente todos los datos:

- Características de las refinerías:

	N	S	SP	$coste$	$días$
A	1	2	4	1500	x
B	2	2	2	2000	y

- Necesito al menos 70 Tm de Normal.
- Necesito al menos 130 Tm de Súper
- Necesito al menos 150 Tm de Sin Plomo
- El coste debe ser mínimo.

Ahora expresemos todos esos datos y condiciones algebraicamente:

- El coste está en función del nº de días (x e y) trabaja cada refinería:

$$c=1500x+2000y$$

- Las incógnitas x e y no tomar valores cualesquiera, están sometidas a unas restricciones:
  - Al menos produciremos 70 Tm de Normal:
  $$x+2y\geq 70$$
  - Al menos produciremos 130 Tm de Súper:
  $$2x+2y\geq 130$$
  - Al menos necesitamos 150 Tm de Sin Plomo:
  $$4x+2y\geq 150$$
  - Evidentemente, no pueden ser negativos:
  $$x\geq 0\ ,\ y\geq 20$$

Concluimos:

- **Objetivo**: minimizar $c=1500x+2000y$
- **Restricciones**: $\begin{cases} x\geq 0\,,\, y\geq 0 \\ x+2y\geq 70 \\ 2x+2y\geq 130 \\ 4x+2y\geq 150 \end{cases}$

Ya lo tenemos planteado, ahora *sólo* resta resolver...

4.

Leemos atentamente el problema y anotamos esquemáticamente todos los datos:

- Características de los electrodomésticos:

	Coste	*Unidades*
A	600	*x*
B	1000	*y*

- Dispongo de 14000 €.
- Como máximo 20 unidades.
- El beneficio, que es el 20% del precio de compra, debe ser máximo.

Ahora expresemos todos esos datos y condiciones algebraicamente:

- El beneficio está en función del número de unidades (*x* e *y*):

$$b=0{,}20\,x+0{,}20\,y$$

- Las incógnitas x e y no tomar valores cualesquiera, están sometidas a unas restricciones:
  - El coste no puede superar los 14000 € de que disponemos:

$$600x+1000y\leq 14000$$

  - El número de unidades no puede superar las 20 unidades que, como mucho, puedo almacenar:

$$x+y\leq 20$$

  - Evidentemente, no pueden ser negativos:

$$x\geq 0\ ,\ y\geq 20$$

Concluimos:

- **Objetivo**: maximizar $c=1500x+2000y$
- **Restricciones**: $\begin{cases} x\geq 0\,,\, y\geq 0 \\ 600x+1000y\leq 14000 \\ x+y\leq 20 \end{cases}$

Ya lo tenemos planteado, ahora *sólo* resta resolver...