TEMA 2

MATRICES Y DETERMINANTES

Contenidos

1. Generalidades.
2. Suma de matrices y producto por un número.
3. Producto de matrices.
4. Matriz inversa.
5. Determinantes de segundo y de tercer orden.
6. Propiedades.
7. Determinantes y matriz inversa.
8. Sistemas de ecuaciones.
9. Determinantes de cualquier orden

Tiempo estimado

10 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Conoce el vocabulario básico para el estudio de matrices: elemento, fila, columna, diagonal, etc.
2. Calcula sumas de matrices, productos de números por matrices.
3. Sabe cuándo es posible efectuar un producto de matrices y conocer la no conmutatividad.
4. Sabe qué es la matriz inversa y cómo calcularla.
5. Calcula el determinante de una matriz, desarrollando por los elementos de una línea.
6. Expresa matricialmente sistemas de ecuaciones lineales y los resuelve usando técnicas matriciales y los determinantes.

1.Generalidades

❑ Definición.

Consideremos la siguiente tabla de doble entrada, correspondiente a las existencias en los distintos almacenes de una cadena de electrodomésticos:

	Lavadoras	Frigoríficos	Hornos	Placas	Extractores
Almacén A	150	100	24	34	67
Almacén B	23	45	67	84	22
Almacén C	11	13	34	61	90
Almacén D	234	34	55	68	107

Observa que los datos se recogen en una tabla. En ella cada fila contiene las existencias de uno de los almacenes, y cada columna el número de unidades de cada uno de los productos.

Si asignamos a cada almacén un número (Almacén A = 1, Almacén B = 2, …), y acordamos un orden en los electrodomésticos (Lavadoras = 1, Frigoríficos = 2, …), toda la información de la tabla puede mostrarse de la siguiente forma, exclusivamente numérica:

$$A=\begin{pmatrix} 150 & 100 & 24 & 34 & 67 \\ 23 & 45 & 67 & 84 & 22 \\ 11 & 13 & 34 & 61 & 90 \\ 234 & 34 & 55 & 68 & 107 \end{pmatrix}$$

Una caja o tabla numérica como la anterior es denominada matriz.

Se las designa a través de una letra mayúscula; en nuestro caso es la matriz *A*.

Las matrices son el medio ideal para organizar y estructurar la información, especialmente la que puede reducirse a números. Y más teniendo en cuenta que los datos se introducen y manipulan en los ordenadores a través de tablas, ya sea en Hojas de Cálculo ya sea en Bases de Datos.

En la matriz anterior, el elemento que ocupa la fila 2^{a} y la columna 3^{a} es $a_{23}=67$. Esto significa que en el almacén B hay 67 hornos. ¿Cuál sería el elemento a_{45} ? ¿Qué representa ese dato?

Como la tabla tiene 4 filas y 5 columnas, se dice que es una matriz de dimensiones 4×5 .

☞ Ejemplo: Escribamos la matriz A de dimensiones 3×4 con $a_{ij}=i+j$

Es claro que $$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Este tipo de tablas es el que vamos a estudiar en esta unidad. Comencemos con la definición y las notaciones:

- Una matriz es una tabla numérica de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Se dice que es una matriz de dimensiones $m \times n$, ya que tiene m filas y n columnas.
- Al elemento que ocupa la fila i y la columna j se le designa por

$$a_{ij} \quad \text{ó} \quad a_i^j$$

- A la matriz se la designa mediante el símbolo

$$A=\left(a_{ij}\right)_{m,\ n}$$

- Se designa por $M_{m\times n}$ al conjunto de las matrices de dimensiones $m\times n$

☞ <u>Ejemplo</u>: construyamos la matriz $B\in M_{4\times 4}$ en la que $b_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}$.

Calculando: $$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

❑ Igualdad

Debemos tener muy claro cuándo diremos que dos matrices son iguales:

Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y coinciden los términos que ocupan el mismo lugar en ambas:

$$A, B\in M_{m\times n} \quad : \quad A=B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a_{ij}=b_{ij} \quad , \quad \forall i, j$$

❑ Matriz Traspuesta

La traspuesta de la matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ es la matriz ${}^tA=\left(a_{ji}\right)_{n,m}$, que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas.

Observemos que si una matriz tiene dimensiones m x n, las dimensiones de su traspuesta son n x m .

☞ <u>Ejemplo</u>:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad {}^tA=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

❑ Algunos tipos de matrices.

Vamos a ver algunas matrices que por sus dimensiones o peculiares características reciben un nombre especial:

☞ **Matriz fila**:

Es aquella que tiene sólo una fila.

Una matriz fila es $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Pueden escribirse también separando sus componentes con comas.

A una matriz fila también se la denomina "vector fila".

☞ **Matriz columna:**

Es aquella que tiene sólo una columna.

Una matriz columna es $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

A una matriz columna también se la denomina "vector columna".

☞ **Matriz cuadrada:**

Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas.

Si la matriz es de dimensiones $n \times n$ se dice que es de orden n.

Una matriz cuadrada de orden 2 es

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Se llama diagonal a la serie formada por los elementos

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

☞ **Matriz triangular:**

Es una matriz cuadrada en la que todos sus términos situados "a un lado" de la diagonal principal son nulos.

Una matriz triangular superior es $A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

Una matriz triangular inferior es $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}$.

☞ **Matriz diagonal:**

Es aquella matriz cuadrada en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal son nulos.

Una matriz diagonal es $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

☞ **Matriz escalar:**

Es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal idénticos.

☞ **Matriz unidad o identidad:**

La matriz identidad o unidad de orden n es la matriz cuadrada en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1, y todos los demás elementos son 0.

Así, la matriz identidad de orden tres es

$$I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

☞ **Matriz simétrica:**

Es aquella matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ en la tiene $a_{ij} = a_{ji}$.

Una matriz simétrica es $$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 0 & 5\\3 & 5 & -1\end{pmatrix}$$

Observemos que en este caso es $A = {}^tA$.

2.Suma y producto por un número

❑ Suma de matrices.

La suma de las matrices A y B, de dimensiones $m\times n$, es otra matriz C de la misma dimensión con

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

Dicha matriz se designa por $A + B$.

Observa que sólo está definida la suma de matrices con iguales dimensiones.

☞ Ejemplo: $$\begin{pmatrix}-2 & 2\\1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 4\\2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\0 & 5\\2 & -2\end{pmatrix}$$

La suma de matrices tiene las siguientes propiedades, que son las mismas que tiene la suma de números reales:

Comprueba, a título de ejemplo, las propiedades con unas matrices.

a) Propiedad asociativa:

$$A, B, C\in M_{m\times n} \quad\rightarrow\quad A+(B+C)=(A+B)+C$$

b) Propiedad conmutativa:

$$A, B\in M_{m\times n} \quad\rightarrow\quad A+B=B+A$$

c) Existencia de elemento nulo: si O designa a la matriz de dimensiones $m\times n$ en la que todos sus elementos son cero, es

$$A\in M_{m\times n} \quad\rightarrow\quad A+O=O+A=A$$

A la matriz que tiene todos sus elementos nulos se la llama matriz nula o matriz cero.

d) Existencia de matriz opuesta: dada una matriz $A \in M_{m \times n}$, si $-A$ designa a la matriz obtenida al cambiar de signo todos los elementos de A. Tenemos que es $A+(-A)=(-A)+A=O$

La matriz –A se denomina opuesta de A.

❑ Resta de matrices.

La diferencia de las matrices A y B, de dimensiones $m \times n$, es la matriz $A-B$ definida mediante:

$$A-B=A+(-B)$$

- Nota: es fácil observar que:

$$A=(a_{ij})_{m,n} \quad , \quad B=(b_{ij})_{m,n} \quad \rightarrow \quad A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m,n}$$

❑ Producto de un número por una matriz.

El producto del número real k por la matriz $A=(a_{ij})_{m,n}$ es la matriz que se obtiene al multiplicar cada elemento de A por dicho número:

$$k \cdot A=(k\, a_{ij})_{m,n}$$

☞ Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 3A=\begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Se cumplen las siguientes propiedades, cuya demostración es simple:

Comprueba, a título de ejemplo, las propiedades con unas matrices.

a) Propiedad distributiva respecto de la suma de matrices:

$$A, B \in M_{m \times n} \quad \rightarrow \quad k \cdot (A+B)=k \cdot A+k \cdot B$$

b) Propiedad distributiva respecto de la suma de números:

$$A \in M_{m \times n} \quad \rightarrow \quad (k+h) \cdot A=k \cdot A+h \cdot A$$

c) Propiedad asociativa mixta:

$$A \in M_{m \times n} \quad \rightarrow \quad (kh) \cdot A=k \cdot (h \cdot A)$$

d) Propiedad del elemento unidad:

$$A \in M_{m \times n} \quad \rightarrow \quad 1 \cdot A=A$$

3.Producto de matrices

❑ Definiciones.

Antes de dar la definición del producto de dos productos veremos una interpretación: una fábrica produce al día 1.000 unidades del producto A, 1500 del producto B y 2.000 del C. Los costes de producción son de 500 € por cada unidad A, 300 de cada unidad B y 100 de cada unidad C. Toda esta información puede reunirse en dos matrices: la matriz P referente a los productos y la matriz U que refleja los costes unitarios.

Observemos cómo se obtiene el costo total:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1000 & 1500 & 2000 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}}_{U} \quad \to \quad 1000 \cdot 500 + 1500 \cdot 300 + 2000 \cdot 100$$

Partiendo de esta idea introduciremos el producto de matrices.

Sea A una matriz de dimensiones $m \times p$ y B una matriz de dimensiones $p \times n$.

Llamaremos matriz producto de A por B a la matriz C de dimensiones $m \times n$ en la que

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj}$$

Dicha matriz se designa por $C = A \cdot B$ o $C = AB$.

Observemos detenidamente la definición:

☞ No está definido el producto de dos matrices cualesquiera: para multiplicar dos matrices es preciso que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz.

En este caso la matriz producto tiene tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda.

☞ Para obtener el elemento que ocupa la fila i y la columna j del producto $A \cdot B$ debemos centrarnos en la fila i de A y en la columna j de B:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj}$$

☞ <u>Ejemplo</u>: Comprobemos los productos siguientes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ No está definido

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Observemos las dimensiones de los factores y del producto:

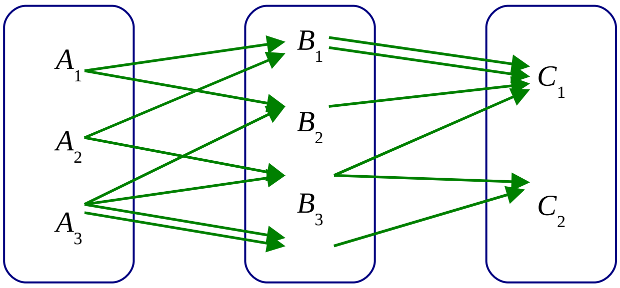
a) (2x3) · (3x1) → (2x1)

b) (3x2) · (2x3) → (3x3)

c) (3x3) · (2x2) → No existe

d) (3x1) · (1x4) → (3x4)

☞ Ejemplo: A continuación se muestra, mediante grafos, los vuelos que hay desde cada uno de los aeropuertos del país A al país B, y desde los de éste al país C.



País A País B País C

Esa información queda resumida en las matrices V_{AB} y V_{BC} así:

$$V_{AB}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&1&2\end{pmatrix} \quad , \quad V_{BC}=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

El producto de las dos matrices nos ofrece los vuelos desde A hasta C, pasando por algún aeropuerto de B:

$$V_{AC}=V_{AB}\cdot V_{BC}=\begin{pmatrix}3&0\\3&1\\2&3\end{pmatrix}$$

❑ Propiedades.

a) Asociativa:

$$A\in M_{m\times p},\ B\in M_{p\times q},C\in M_{q\times n} \quad \rightarrow \quad A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$$

b) Distributiva por la izquierda y por la derecha:

$$A\in M_{m\times p},\ B,C\in M_{p\times n} \quad \rightarrow \quad A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

$$A,B\in M_{m\times p},C\in M_{p\times n} \quad \rightarrow \quad (A+B)\cdot C=A\cdot B+A\cdot C$$

Aquí se acaba la similitud, respecto de las propiedades, entre el producto de matrices y el producto de los números reales. Comprobaremos a continuación que el producto de matrices no es conmutativo. Esto nos obliga a ser cuidados a la hora de trasladar las propiedades que estamos acostumbrados a aplicar cuando trabajamos con el producto de matrices.

☞ El producto de matrices no es conmutativo. Observemos unos casos:

– Si A es una matriz de dimensiones 2×3 y B una matriz de dimensiones 3×4, puede efectuarse $A\cdot B$, pero no $B\cdot A$.

– Si A es una matriz de dimensiones 2×3 y B una matriz de dimensiones 3×2, es $A\cdot B$ una matriz 2×2 y $B\cdot A$ es una matriz 3×3, de donde tenemos que es $A\cdot B\neq B\cdot A$

Atención: existen matrices A y B tales que

A · B = B · A

Se dice en ese caso que las matrices A y B conmutan. importante observar que un sistema lineal con solución, bien es compatible determinado bien indeterminado.

– Si $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ es $A\cdot B\neq B\cdot A$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ y } B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

4.Matriz inversa.

Consideremos el conjunto de las matrices cuadradas de orden *n*, que se designa por $M_{n\times n}$.

Dos matrices cualesquiera de este conjunto pueden multiplicarse, siendo el resultado otra matriz de orden *n*. Tenemos de esta forma que el producto es una operación interna en $M_{n\times n}$.

❑ Elemento unidad.

Recordemos la matriz identidad o unidad: $I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$

En la matriz unidad todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1, y el resto de los elementos de la matriz son todos nulos.

Es fácil comprobar que para cualquier matriz A de orden n es

$$A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$$

Esto significa que el producto de matrices en $M_{n\times n}$ tienen un elemento unidad, y que es precisamente la matriz I_n.

❑ Matriz inversa.

El concepto de matriz inversa es algo relativamente simple: diremos que dos matrices son inversas cuando su producto es la matriz unidad:

Diremos que las matrices A y B de $M_{n\times n}$ son inversas cuando

$$A\cdot B=B\cdot A=I_n$$

Se dice que la matriz B es la inversa de A, y se escribe $B=A^{-1}$.

Se dice que una matriz cuadrada A es inversible o regular cuando tiene matriz inversa.

El producto de matrices vuelve aquí a diferenciarse del producto de números reales: no toda matriz $A\neq 0$ tiene inversa. Lo veremos a continuación.

☞ Ejemplo: comprobemos que $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ son matrices inversas:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2\cdot 2+1\cdot(-3) & 2\cdot(-1)+1\cdot 2\\ 3\cdot 2+2\cdot(-3) & 3\cdot(-1)+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

Si A y B son cuadradas con

A·B = I

se demuestra que también es

B·A = I.

☞ Ejemplo: hallemos la inversa de $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pongamos $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A\cdot A^{-1}=I_2 \quad \to \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{cases} 2a+c=1 \\ a+c=0 \\ 2b+d=0 \\ b+d=1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $a=1, b=-1, c=-1, d=2$.

Así: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

☞ Ejemplo: la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

Observemos que cuando se multiplica por una matriz B cualquiera nunca obtenemos la matriz unidad:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}\neq I_2$$

☞ *Nota*: si una matriz A es inversible, la inversa es única. Esto es, hay sólo una matriz que multiplicada A da como resultado la matriz unidad:

$$\left.\begin{matrix} A\cdot B=I_n \\ A\cdot C=I_n \end{matrix}\right\} \quad \to \quad B=C=A^{-1}$$

5. Determinante de una matriz

❑ Introducción.

Vamos a introducir el concepto partiendo de un sencillo y conocido problema: la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

En un sistema así a $C=\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$

se le llama matriz de los coeficientes.

Para resolverlo, eliminaremos la incógnita y –método de reducción–. Para ello multiplicamos la primera ecuación por $b´$ y la segunda por b:

$$\left.\begin{matrix} ab'x+b'y=b'c \\ a'bx+bb'y=bc' \end{matrix}\right\} \xrightarrow[restando]{} (ab'-a'b)\cdot x=b'c-bc' \qquad (*)$$

José Álvarez Fajardo

El número $\boxed{d = ab' - a'b}$

determina cómo es el sistema:

- Si $d \neq 0$ podremos despejar x y el sistema tendrá solución única
- Si $d = 0$ no podremos despejar x : o no hay solución o hay infinitas soluciones

Por ello ese número es llamado determinante de *C*, y se escribe así:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Observa que en (*) el segundo miembro también es un determinante:

$$\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = b'c - bc'$$

Tenemos así que si $d \neq 0$ entonces el sistema es compatible determinado y la solución viene dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Vemos que la solución puede expresarse de forma sencilla y elegante con determinantes.

Determinantes de orden 2.

El determinante de una matriz cuadrada es un número que se obtiene a partir de ella. Veamos en primer lugar qué es y cómo se designa el de una matriz cuadrada de orden 2:

> Dada una matriz cuadrada de orden dos
>
> $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
>
> se llama determinante de A al número dado por:
>
> $$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

También se designa a dicho número mediante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

☞ Ejemplo: calculemos los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) = 30$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix} = x \cdot x - y \cdot (-y) = x^2 + y^2$$

$$\det I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

❑ Determinantes de orden 3.

Vamos ahora a ver cómo se calcula el determinante de una matriz cuadrada de tercer orden.

Desde luego el cálculo es algo más complicado que en las matrices de orden 2:

Dada una matriz cuadrada de orden tres

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se llama determinante de A al número real dado por la siguiente fórmula:

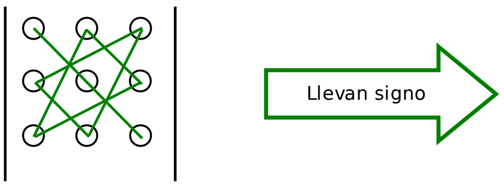
$$det\,A=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

También se designa a dicho número mediante:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Insistimos: el determinante de una matriz es un número real, y dicho número se obtiene por la fórmula que hemos dado en la definición.

La fórmula puede recordarse fácilmente a través de la denominada "regla de Sarrus":



+

−

Observa que

- en cada producto hay un factor de cada fila y de cada columna de la matriz
- están todos los posibles productos que así pueden formarse
- la mitad de ellos tiene un signo + y la otra tiene un signo −.

☞ Ejemplo: calculemos los determinantes siguientes

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-5$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-4$$

☞ Ejemplo: el determinante de la matriz unidad es 1

$$det\,I_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

☞ Ejemplo: comprobemos que es muy fácil obtener el determinante de una matriz triangular: es el producto de los elementos de su diagonal.

6. Determinantes: propiedades

Vamos a continuación a estudiar ciertas propiedades que tienen los determinantes. Recordemos que se refieren siempre a matrices cuadradas.

Las propiedades de los determinantes se demuestran, bien a partir de la definición, bien a partir de otras anteriormente probadas. Puede intentarse alguna demostración como ejercicio de ampliación.

Si A es una matriz cuadrada de orden n y designamos a sus columnas por $c_1, c_2, \ldots, c_n$ escribiremos

$$det\ A = det\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix}$$

Propiedad 1: El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta:

$$det(A) = det(A^t)$$

Propiedad 2: Si multiplicamos cada elemento de una línea del determinante por un número, el determinante queda multiplicado por ese número:

$$\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Propiedad 3: Si una línea de un determinante puede expresarse como suma de dos, éste puede descomponerse en suma de dos determinantes así:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Propiedad 4: El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes:

$$det(A\cdot B) = det(A)\cdot det(B)$$

Propiedad 5: Un determinante cambia de signo al permutar dos líneas paralelas:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a' & a & a'' \\ b' & b & b'' \\ c' & c & c'' \end{vmatrix}$$

Propiedad 6: Un determinante con una línea de ceros es cero:

$$\begin{vmatrix} a & a' & 0 \\ b & b' & 0 \\ c & c' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 7: El determinante de una matriz en la que una línea es combinación lineal de otras paralelas es cero:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a+a' \\ b & b' & b+b' \\ c & c' & c+c' \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 8: El determinante de una matriz no cambia si a una línea añadimos una combinación lineal de otras paralelas:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a''+k\,a \\ b & b' & b''+k\,b \\ c & c' & c''+k\,c \end{vmatrix}$$

7.Determinantes y matriz inversa

Recordemos el concepto de matriz inversa:

Si A es una matriz cuadrada de orden n, se dice que A es inversible si existe una matriz A^{-1} que verifica

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$$

Recordemos que no toda matriz cuadrada tiene inversa.

Los determinantes son una herramienta que permiten caracterizar qué matrices son invertibles y calcular la inversa en caso de que exista.

Para ello se introduce el concepto de adjunto de un elemento. Pasemos a definirlo:

Sea A una matriz cuadrada. El adjunto del elemento elemento a_{ij}, designado por A_{ij}, al producto del número $(-1)^{i+j}$ por el determinante obtenido de A al eliminar la fila i y la columna j

Observa que:

- si A es una matriz cuadrada de orden n entonces cada menor complementario es un determinante de orden n-1.
- el adjunto es igual al determinante complementario con su signo o cambiado de signo, según sea i + j par o impar.

☞ Ejemplo: En la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

El adjunto de a_{12} es $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-1\cdot 3=-3$

El adjunto de a_{23} es $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)=1$

El adjunto de a_{31} es $A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1=1$

¿Cuál es el adjunto de 5?

El siguiente Teorema de la Matriz Inversa es fundamental:

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

1. A es invertible si y sólo si es $det\,A\neq 0$
2. Si $det\,A\neq 0$ la inversa de A es la matriz

$$A^{-1}=\frac{1}{det\,A}\cdot(Adj\;A)^t$$

donde la matriz $Adj\,A=\left(A_{ij}\right)$ es la adjunta de A.

☞ Ejemplo: veamos que la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ no tiene inversa:

$$det\ A=3\cdot3-1\cdot9=0 \ \rightarrow \ A \ \text{no es inversible.}$$

☞ Ejemplo: hallemos la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Primero: $det\ A=2 \ \underset{det\ A\neq 0}{\rightarrow}$ Existe A^{-1}

Necesitamos calcular la matriz adjunta:

$$\begin{array}{lll} A_{11}=3 & A_{12}=-7 & A_{13}=-1 \\ A_{21}=0 & A_{22}=2 & A_{23}=0 \\ A_{31}=-4 & A_{32}=10 & A_{33}=2 \end{array}$$

La inversa es $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -7 & 2 & 10 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

8.Sistemas de ecuaciones.

❑ Notación y resolución matricial.

Un sistema de ecuaciones lineales puede expresarse siempre como una igualdad matricial.

Por ejemplo, consideremos el siguiente caso:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=-1 \\ x+3y+2z=-2 \\ 2x+5y+4z=2 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Las matrices que intervienen son:

$$C=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}}_{coeficientes} \qquad X=\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{incógnitas} \qquad B=\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\substack{términos\\independientes}}$$

El sistema ha quedado expresado así:

$$\boxed{C\cdot X=B}$$

Si la matriz C de los coeficientes es cuadrada e invertible, es posible resolver el sistema usando de la matriz inversa de la siguiente forma:

$$\boxed{C\cdot X=B \ \rightarrow \ C^{-1}\cdot C\cdot X=C^{-1}\cdot B \ \rightarrow \ I\cdot X=C^{-1}\cdot B \ \rightarrow \ X=C^{-1}\cdot B}$$

En el caso que estamos viendo tenemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

❑ Regla de Cramer.

La Regla de Cramer es un Teorema que se refiere a sistemas de ecuaciones lineales en el que el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas. Es un Teorema práctico que permite obtener la solución a través de determinantes. Un caso particular es el que vimos en la introducción del concepto de determinante:

Consideremos el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$S: \begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\ a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

Si el determinante de los coeficientes es distinto de cero, entonces el sistema es compatible determinado.

La solución viene dada por

$$x_k = \frac{|C_k|}{|C|} \ ,, \ k = 1, \ldots, n$$

donde C_k designa a la matriz que se obtiene al sustituir en C la columna k por la matriz columna de los términos independientes.

Se llama sistema de Cramer a un sistema de n ecuaciones y n incógnitas con determinante de coeficientes distinto de cero.

☞ Ejemplo: resolvamos usando la Regla de Cramer el sistema

$$S: \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases}$$

Es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{19}{23} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{17}{23}$$

☞ Ejemplo: resolvamos usando la Regla de Cramer el sistema

$$S: \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas con:

$$det\, C = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Tenemos así que es compatible determinado con:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3&1&1\\4&2&1\\2&1&2\end{vmatrix}}{4}=\frac{3}{4}\ ,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}2&3&1\\1&4&1\\1&2&2\end{vmatrix}}{4}=\frac{7}{4}\ ,\quad z=\frac{\begin{vmatrix}2&1&3\\1&2&4\\1&1&2\end{vmatrix}}{4}=\frac{-1}{4}$$

☞ Ejemplo: el sistema

$$\begin{cases}x+2y=4\\2x+4y=5\end{cases}$$

no es un sistema de Cramer, ya que $det(C)=0$.

Observemos que es incompatible.

9.Ampliación: determinantes de cualquier orden.

Para obtener determinantes de orden superior a tres o se acude a una máquina que sea capaz de calcularlos (calculadora gráfica u ordenador) o se intenta reducir el cálculo a determinantes de orden 2 y 3.

Veamos una "definición inductiva" del concepto de determinante:

Sea A una matriz cuadrada.

Si A es de orden n = 1, concretamente $A=[\alpha]$, llamamos determinante de A al número dado por:

$$det\,A=\alpha$$

Si A es de orden n > 1, supuesto definido el determinante de toda matriz cuadrada de orden n – 1, llamamos determinante de A al número:

$$det\,A=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+\ldots+a_{1n}\cdot A_{1n}$$

El determinante de una matriz A se designa también mediante $|A|$.

La definición dada es del tipo conocido como "inductiva" o "recurrente". Observa que nos dice directamente cómo calcular los determinantes de orden 1.

Usando la segunda parte, podremos calcular los de orden 2, a continuación los de orden 3, y así sucesivamente.

☞ Ejemplo: calculemos $\Delta=\begin{vmatrix}3&0&2&0\\-1&1&0&2\\1&1&2&1\\2&1&0&3\end{vmatrix}$

$$\Delta=3\cdot\begin{vmatrix}1&0&2\\1&2&1\\1&0&3\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-1&1&2\\1&1&1\\2&1&3\end{vmatrix}=3\cdot2+2\cdot(-5)=-4$$

☞ Ejemplo: observa cómo se calcula el siguiente determinante de orden tres a partir de los elementos de la primera línea:

$$\begin{vmatrix}2&1&-3\\3&2&1\\1&0&3\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\0&3\end{vmatrix}+1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}3&1\\1&3\end{vmatrix}+(-3)\cdot\begin{vmatrix}3&2\\1&0\end{vmatrix}=$$
$$=2\cdot6-1\cdot8-3\cdot(-2)=10$$

Comprueba ese valor con la Regla de Sarrus.

Comprueba ese valor con la regla de Sarrus.

☞ Ejemplo: comprobemos que obtenemos con lo anterior la fórmula de los determinantes de orden tres partiendo de los determinantes de orden dos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} =$$
$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) =$$
$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

☞ Ejemplo: Es fácil deducir, directamente de la definición, que el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Ejercicios

1. Escribe la matriz traspuesta de:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

2. Se consideran las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

Calcula: $3A$, $3A+2C$, $A{\cdot}C$, $C{\cdot}A$ y $A{\cdot}B$.

3. Dadas las matrices siguientes

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

Calcula, cuando sea posible: $A{\cdot}B+C$, $B{\cdot}A+C$, A^2 , B^2 y C^2.

4. Dada $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, obtén A^2-3A-I_2.

5. Calcule $A^t\cdot A$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

6. Obtén las matrices A y B que verifiquen el sistema

$$\begin{cases}2A+B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ A-3B=\begin{pmatrix}-4 & -3 & -2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\end{cases}$$

7. Encuentra una matriz X que cumpla

$$2X+3A=4B$$

siendo

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

8. Calcule los valores de x e y que verifican la siguiente igualdad:

$$3\begin{pmatrix}x & 2\\ 0 & y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}y & 2x\\ 1 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2y\\ -1 & -3x\end{pmatrix}$$

9. Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

10. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, se pide hallar la matriz $3A\cdot{}^tA-2I_2$.

11. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

a) Compruebe si $(A-B)^2=A^2+B^2-2\cdot A\cdot B$

b) ¿Se pueden multiplicar las matrices A y C en cualquier orden?

12. Expresa como un sistema de ecuaciones las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -7\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

13. Encuentre una matriz X tal que se verifique la igualdad $AB-2X=A^2$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

14. Obtén la matriz X que cumpla $A+X=A\cdot B$ con:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

15. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$:

a) Comprueba que $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$

b) Resuelve la ecuación $X\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

16. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

a) Comprueba que es $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

b) Resuelve la ecuación $A\cdot X-B+C=0$

17. Calcula los siguientes determinantes de orden dos y tres:

a) $\Delta_1=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}$ y $\Delta_2=\begin{vmatrix}x & y\\ -y & x\end{vmatrix}$

b) $\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}$ y $\Delta_2=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}$

18. Calcula los determinantes de orden 3

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -2\end{vmatrix}$$

19. Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & m & 3\\ 4 & 1 & m\end{pmatrix}$

Averigua para qué valores del parámetro m existe A^{-1}. Calcúlala para $m=2$.

20. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

obtén si es posible la matriz $(B\cdot A)^{-1}$.

21. Halla los valores de x para los que tiene inversa la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & x\\ x & 2 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Calcula su inversa para $x=1$

22. Halla una matriz X tal que $A\cdot X+B=C$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

23. [S/97]Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & t & -1\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & -4\end{pmatrix}$$

a) Razona si existe la matriz $(A-2\,C\cdot B\cdot C)^{-1}$.

b) Ídem. $(2\,A-B\cdot C)^{-1}$.

c) En ambos casos, y cuando sea posible, calcula las matrices inversas.

24. [S/97] Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & x & 3\\ 4 & 1 & -x\end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de x no tiene inversa?

b) Calcula la inversa cuando es $x=2$.

25. [S/97]Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{pmatrix}$$

explica si hay alguna matriz X de segundo orden tal que $A\cdot X=B\cdot X$.

26.[S/98]Dada $A=\begin{pmatrix} b & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

a) Si es b = 0, halle una matriz X de dimensión 2 tal que $X\cdot A=\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si es b = 2, halle una matriz X de dimensión 2 tal que $A\cdot X=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

27.[S/98]Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \;,\; B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \;\text{y}\; C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Indique los productos matriciales que pueden efectuarse entre ellas, sin repetir factores.

b) Calcule $B + C \cdot A$.

c) Calcule el determinante de $A \cdot C$. ¿Tiene inversa esta matriz?

28. [S/99]Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Compruebe que $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$.

b) Halle una matriz X que verifique:

$$A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

29.[S/99]Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+2z &= -1 \\ -x+y-2z &= 0 \end{cases}$$

a) Expréselo en forma matricial.

b) Calcule la matriz inversa de la matriz de coeficientes.

c) Resuélvalo.

30. [S/99] Halle A^{200} para la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

31.[S/00]Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+y+mz &= -2 \\ x+2y+z &= 2 \\ x+my-2z &= -4 \end{cases}$$

a) Calcule, para m = 1, la inversa de la matriz de coeficientes.

b) Resuelva, para m = –1, el sistema del apartado anterior.

32.[S/00] Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, calcule $A+A^{-1}$

33. [S/00] Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule $A\,A^t$ – t indica traspuesta –.

b) Halle la matriz inversa de A para a = 8.

c) ¿Tiene inversa A cuando a = 7?

34.[S/00] Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X+2B=A^t$.

b) Calcule la matriz A^{2000}.

35.[S/00] Sea la matriz $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcule $A=M^{-1}$, $B=2M-M^t$.

b) Resuelva la ecuación $XM+B=I_2$.

36.[S/01] Resuelva la ecuación $A\cdot X-2B=C$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \;\text{y}\; C=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

37. [S/01]Sea el sistema $\begin{cases} 3x-2y-2z=3 \\ x-z=1 \\ 2y-z=0 \end{cases}$

a) Expréselo en forma matricial.

b) ¿Posee inversa la matriz de los coeficientes? Justifique la respuesta

c) Resuélvalo y clasifíquelo en cuanto al número de soluciones.

38.[S/01] Si $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}$

razone si posee solución la ecuación matricial $A\cdot X=B$ y, en caso afirmativo, resuélvala.

39.[S/01]

a) Determine los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x\\y&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

b) Determine la matriz X de dimensión 2×2 tal que:

$$X\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\3&-1\end{pmatrix}$$

40. [S/01] Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&x&-1\\1&1&1\\x&x&0\end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores de x para los que no existe la inversa de A .

b) Para $x=3$ calcule, si es posible, A^{-1} .

41.[S/02] Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&m&-6\\1&1&-m\end{pmatrix}$$

a) Determine para qué valores del parámetro m existe A^{-1} .

b) Calcule la inversa para $m=2$.

42.[S/02] Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&m-6&3\\m+1&2&0\end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores de m para que dicha matriz tenga inversa.

b) Haciendo $m=2$, resuelva la ecuación matricial

$$X\cdot A=(\,3\;\;1\;\;1\,)$$

43.[S/02]Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&m&-6\\1&1&-m\end{pmatrix}$

halle, si existe, la matriz X que cumpla

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\ .$$

44.[S/02] Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\text{ y }D=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}$$

calcule x , y , z sabiendo que $A\cdot B=2C-D$

45.[S/02] Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}-1&2&5\\3&4&-10\end{pmatrix}$$

a) Realice, cuando sea posible, los siguientes productos de matrices: $A\cdot B$, $B\cdot C$, $C\cdot A$.

b) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X+B=C$.

46.[S/03] Determine la matriz X que verifica

$$X\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&7\\1&-1\end{pmatrix}$$

47.[S/03] Sea la matriz $M=\begin{pmatrix}3&m\\1-m&m+1\end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de m para los que dicha matriz tiene inversa.

b) Haciendo $m=0$, resuelva la ecuación matricial $A\cdot X\cdot A=I_2$.

48.[S/03] Resuelva la ecuación $\begin{vmatrix}1&3&-5\\4&2+x&x\\-1&1&-3\end{vmatrix}=0$

49.[S/03] Sea la matriz $M=\begin{pmatrix}2&x\\0&x+2\end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de x se verifica $A^2=2A$?

b) Para $x=1$, halle A^{-1} y compruébelo.

50.[S/03] Calcule $\left(A^t\cdot B-2I_2\right)^{-1}$ siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$$

51.[S/04] De una matriz A se sabe que su segunda fila es $\begin{pmatrix}-1&2\end{pmatrix}$ y su segunda columna es ${}^t\begin{pmatrix}1&2&-3\end{pmatrix}$.

Halle los restantes elementos de A sabiendo que

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

52.[S/04] Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

a) Calcule $(A-I_2)\cdot B$.

b) Obtenga B^t y calcule, si es posible, $B^t\cdot A$.

c) Halle la matriz X que cumple $A\cdot X+B=C$

53.[S/04] Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, halle A^{2004} .

54.[S/04] Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-y-z &= -2\\ 2x+3y-z &= 2\\ 4x+y-3z &= -2\end{cases}$$

a) Clasifique y resuelva el sistema.

b) Escriba la matriz de coeficientes de este sistema y, si es posible, calcule su matriz inversa.

55.[S/04] Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix} , B=\begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}1&-2\\0&2\\-2&0\end{pmatrix}$$

a) Halle la matriz P que cumple $B\cdot P-A=C^t$

b) Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A\cdot M\cdot C$.

c) Determine la dimensión de la matriz N para que $C^t\cdot N$ sea una matriz cuadrada.

56. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-y-z &= 1\\ -x+3z &= 0\\ -2x+5y-3z &= -1\end{cases}$$

a) Comprueba que la inversa de la matriz de coeficientes es

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}15&8&3\\9&5&2\\5&3&1\end{pmatrix}$$

b) Resuelve matricialmente el sistema.

57. Dado $\begin{cases} x+y+z &= 4\\ x+3y+2z &= 5\\ 2x+ay+3z &= 13\end{cases}$

a) ¿Para qué valores de a es compatible determinado?

b) Resuélvelo para $a = 2$

c) ¿Cómo es el sistema para $a = 4$?

58. Demuestra que para ningún valor de m es incompatible el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=5\\ x+my=2\end{cases}$$

Cuestiones

1. Una matriz A se dice que es antisimétrica si su traspuesta coincide con su opuesta. Escribe una matriz antisimétrica.
Observa que debe ser $a_{ji}=-a_{ij}$, $\forall i,j$

2. Comprueba la propiedad asociativa del producto con las matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\-2&0\end{pmatrix} , B=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix} , C=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, calcula A^n .

4. Se dice que dos matrices A y B conmutan si $AB=BA$. Escribe dos matrices cuadradas distintas y no nulas que conmuten.

5. Comprueba la propiedad distributiva

$$A(B+C)=AB+AC$$

con las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

6. Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si cumple $A\cdot A^t=I$. Estudia si es ortogonal:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

7. Comprueba con las matrices A y B que es $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

8. Sea A una matriz de dimensión 2×3. ¿Existe una matriz B tal que $A\cdot B$ sea una matriz fila? ¿Y una matriz columna?

Idem para el producto $B\cdot A$.

9. En cada caso, escribe dos matrices 2×2, A y B, tales que: Comprueba con ejemplos que puede ser

a) $A\cdot B=0$ con $A\neq0$ y $B\neq0$

b) $A\cdot B=A\cdot C$ con $B\neq C$

c) $(A+B)^2\neq A^2+B^2+2AB$

d) $(A-B)^2\neq A^2+B^2-2AB$

e) $(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$

10. Sean A, B, C y D matrices cuadradas donde A y B son invertibles. Despeja X en las igualdades siguientes:

a) $A\cdot X-B=C$

b) $X\cdot B-A\cdot C=3D$

c) $2C-A\cdot X=B\cdot D$

d) $3A\cdot D-2X\cdot B=2A\cdot C$

11. Sean A y B dos matrices cuadradas e inversibles. Demuestra que es

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$$

12. Demuestra que el determinante de una matriz cuadrada A de orden 2 coincide con el de su traspuesta.

13. Sea A una matriz cuadrada con $\det A=k$.

a) ¿Cuándo es A inversible?

b) Averigua cuál es el valor de $det(A^{-1})$.

14. Sea A una matriz cuadrada de tercer orden. Con $det\,A=3$. Razona que es $det(2\text{A})=24$

15. Sea $A\in M_{3\times3}$ con $det\,A=2$. Obtén el valor de $det(3\text{A})$ y $det(A^{-1})$.

16. Sean A y B matrices cuadradas de igual orden. Demuestra que si son invertibles, entonces también lo es la matriz producto $A\cdot B$.

17. Sea $A=(c_1\ \ c_2\ \ c_3)\in M_{3\times3}$, con $det\,A=-4$.

Deduce el valor de:

a) $det(c_1+2c_2\ \ c_2\ \ c_3)$

b) $det(3c_1\ \ c_2\ \ 2c_3)$

c) $det(c_1\ \ c_2\ \ c_1+2c_3)$

d) $det(c_1+c_3\ \ c_2\ \ c_1)$

18. [S/97] Sea A una matriz de 3 filas y 4 columnas y C una matriz 2×3. ¿Cuántas filas y columnas tiene B sabiendo que existe la matriz $A\cdot B\cdot C$? ¿Qué dimensiones tiene la matriz $A\cdot B\cdot C$?

19. [S/97] Sea D una matriz tal que al multiplicarla por su traspuesta da una matriz de dimensión 1×1, y tal que el producto de la traspuesta de D por la propia D es 3×3. ¿Cuántas filas y columnas tiene D? ¿Tiene D inversa?

20. [S/97] Siendo $E^t=(1,2,3)$, calcula el determinante de la matriz $E\cdot E^t$.

21. [S/98] Si A y B son dos matrices cualesquiera, ¿es correcta la siguiente cadena de igualdades?

$$\begin{aligned}&(A+B)\cdot(A-B)=A(A-B)+B(A-B)=\\&=AA-AB+BA-BB=A^2-AB+BA-B^2=\\&=A^2-B^2\end{aligned}$$

Autoevaluación

1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

comprueba con ellas que se verifica

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

2. Obtén x e y para que conmuten las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ y \ B=\begin{pmatrix} x & 5 \\ y & 7 \end{pmatrix}$$

3. Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que la inversa de A es

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcula X en la igualdad

$$A \cdot X = B$$

4. Consideremos la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 2 & -1 & x \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de x no tiene inversa?

b) Obtén la inversa A^{-1} para $x = 0$.

5. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$S: \begin{cases} x+y=3 \\ x+z=4 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

a) Escribe matricialmente el sistema

b) Comprueba que la matriz de coeficientes del sistema es inversible, calculando su inversa.

c) Resuélvelo utilizando el apartado anterior.

6. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y-z & = & 0 \\ x+y+z & = & a+1 \\ ax+3y-z & = & 4 \end{cases}$$

a) Demuestra que si $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado.

b) Resuélvelo para $a = 0$.

c) ¿Cómo es el sistema para $a = 3$?

Autoevaluación

1. Basta efectuar y comprobar que los resultados son iguales:

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix} \rightarrow (AB)^t=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$B^t A^t=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

2. Se verifica $AB=BA$

Efectuando: $\begin{pmatrix}x-y & -2\\ y & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & -x+5\\ y & -y+7\end{pmatrix}$

Igualando obtenemos:

$$\begin{cases}x-y=x \rightarrow y=0\\ -2=-x+5 \rightarrow x=7\\ y=y\\ -y+7=7 \rightarrow y=0\end{cases}$$

Concluimos así que

$$x=7 \text{ e } y=0$$

Así, resulta que es:

$$B=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 0 & 7\end{pmatrix}$$

3.

a) Basta efectuar y comprobar que su producto es la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -6 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Podemos despejar, ya que conocemos la inversa de la matriz A:

$$AX=B \rightarrow A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot B \rightarrow$$
$$\rightarrow I\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow X=A^{-1}B$$

Basta calcular:

$$X=\begin{pmatrix}3 & -6 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\ 2\\ 7\end{pmatrix}$$

4.

a) Una matriz tiene inversa si, y sólo si, su determinante no es cero.

$$det\, A=x^2+2x-15$$

Igualando a cero ese determinante:

$$x^2+2x-15=0 \rightarrow \begin{vmatrix}x=3\\ x=-5\end{vmatrix}$$

A no tiene inversa precisamente cuando se tiene $x=-5$ ó $x=3$

b) Si $x=0 \rightarrow det\, A=-15$

Es $A^{-1}=\frac{1}{-15}(Adj\, A)^t$

Realizando los cálculos de los adjuntos:

$$A^{-1}=-\frac{1}{15}\begin{pmatrix}6 & -10 & -1\\ 12 & -5 & -2\\ 21 & -10 & -1\end{pmatrix}$$

5.

a) La matriz de los coeficientes es:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Veamos que no es cero su determinante:

$$det\, C=1\neq 0$$

Su inversa viene dada por:

$$C^{-1}=\frac{1}{|C|}(Adj\, C)^t=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

b) Tenemos:

$$C\cdot X=B \rightarrow C^{-1}\cdot C\cdot X=C^{-1}\cdot B \rightarrow X=C^{-1}\cdot B$$

Así, obtenemos la solución:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

6. Calculemos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2a - 6$$

Y veamos cuándo es cero:

$$\det C = 0 \quad \rightarrow \quad 2a - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 3$$

a) Si es $a \neq 3$, por la Regla de Cramer deducimos que el sistema es compatible determinado (ya que el determinante de los coeficientes es distinto de cero).

b) Para $a = 0$ podemos aplicar la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\det C} = \frac{6}{-6} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{\det C} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\det C} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

c) Para $a = 3$ no podemos aplicar la Regla de Cramer, ya que el determinante de los coeficientes es igual a cero.

El sistema es bien compatible determinado, bien incompatible. Podemos resolver directamente:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 4 \\ 3x + 3y - z = 4 \end{cases} \left| \begin{matrix} e_2 - e_1 \\ e_3 - 3e_1 \end{matrix} \right\rangle \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2z = 4 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

Vemos que la tercera ecuación es combinación de las anteriores: estamos ante un sistema compatible indeterminado.

La solución es:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \qquad (t \text{ es un nº cualquiera})$$