TEMA 1

Sistemas De Ecuaciones

Contenidos

1. Ecuaciones lineales.
2. Sistemas de ecuaciones lineales.
3. Clasificación de los sistemas de ecuaciones.
4. Sistemas equivalentes.
5. Sistemas escalonados: método de Gauss.
6. Ampliación: interpretación geométrica de sistemas lineales con tres ecuaciones.

Tiempo estimado

8 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Domina los conceptos de ecuación lineal, soluciones de una ecuación y de un sistema.
2. Es capaz de clasificar sistemas atendiendo al conjunto de sus soluciones e interpretarlos geométricamente.
3. Dado un sistema, es capaz de obtener otro equivalente mediante las transformaciones elementales.
4. Resuelve por un método apropiado cualquier sistema lineal de, a lo sumo, cuatro ecuaciones y no más incógnitas.
5. Aplica la resolución de sistemas a problemas concretos de diversos ámbitos.

1.Ecuaciones lineales.

❑ Ecuaciones con varias incógnitas.

Intentemos resolver algebraicamente el siguiente problema: “obtén dos números reales sabiendo que suman 5”.

Dar una solución es sencillo. Observemos que una solución no es un número, sino una pareja de números. Por ejemplo, una solución es la pareja de números $(4\ ,\ 1)$.

Intentemos encontrar la solución general del problema: llamamos x a uno de los números e y al otro. Debe verificarse:

$$x+y=5$$

Esto es una ecuación lineal con dos incógnitas.

Tiene infinitas soluciones:

$$(x,y)=(4,1)\ ,\ (x,y)=(-2,7)\ ,\ (x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)\ ,\ \ldots$$

Para obtener soluciones, despejamos una incógnita en función de la otra:

$$x+y=5\ \rightarrow\ y=5-x$$

Ahora damos valores a la incógnita x :

$$\begin{array}{lll}
\text{Si } x=1 \rightarrow y=4 & \big|\ \text{Una solución es}\ \big\rangle & (x,y)=(1,4)\\
\text{Si } x=5 \rightarrow y=0 & \big|\ \text{Una solución es}\ \big\rangle & (x,y)=(5,0)\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
\text{Si } x=t \rightarrow y=5-t & \big|\ \text{Una solución es}\ \big\rangle & (x,y)=(t,5-t)
\end{array}$$

La solución general es, pues:

$$S=\{(t,5-t)\ :\ t\in\mathbb{R}\}$$

❑ Ecuaciones lineales.

La ecuación que hemos estudiado antes es una ecuación lineal. Otras ecuaciones lineales son:

$$2x+5=0\ \ ;\ \ 3x-4y=5\ \ ;\ \ x+y+z=3$$

No son lineales aquellas en las que las incógnitas van elevadas a potencias, se multiplican entre sí, …. Por ejemplo:

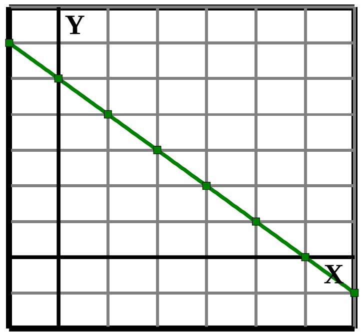
$$y-x^2=0\ \ ;\ \ x\cdot y=1$$

En general:

> Una ecuación lineal es una ecuación polinómica de primer grado con una o varias incógnitas.

Interpretación geométrica.

Hemos visto que la ecuación $x + y = 5$ tiene infinitas soluciones, y que cada una de las soluciones es un par (x, y) de números que cumple $y = 5 - x$.



Podemos representar cada pareja solución en unos ejes de coordenadas:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y = 5 - x$	6	5	4	3	2	1	0	-1

Obtenemos una recta, en la que las coordenadas de cada punto son una solución de la ecuación $x + y = 5$.

Una ecuación lineal de dos incógnitas puede interpretarse en el plano como una recta, donde los puntos de la recta son las soluciones de dicha ecuación.

☞ Más adelante veremos la interpretación geométrica de una ecuación lineal con tres incógnitas.

2.Sistemas de ecuaciones lineales.

Sistemas de ecuaciones lineales.

Consideremos ahora el siguiente problema: "Obtén dos números reales, sabiendo que su suma es 5 y que su diferencia es 1".

Si llamamos x al primer número e y al segundo, tienen que verificarse, a la vez, las dos condiciones siguientes:

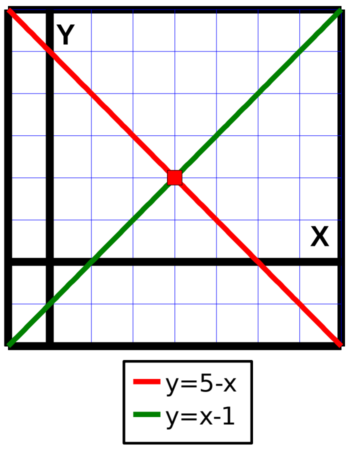
$$\left.\begin{array}{lll} \text{Su suma es } 5 & \rightarrow & x+y=5 \\ \text{Su diferencia es } 1 & \rightarrow & x-y=1 \end{array}\right\}$$

Repasa en tus apuntes de cursos anteriores los métodos elementales de resolución de sistemas de ecuaciones: sustitución, igualación y reducción

Ahí tenemos un sistema de ecuaciones: es la consideración simultánea de las dos igualdades.

La solución del sistema es un par de números que debe cumplir las dos ecuaciones. Por ejemplo, el par $(x, y)=(5, 0)$ no es solución del sistema, siendo sólo solución de la primera ecuación. Es fácil observar que la única solución es $(x, y)=(3, 2)$.

Interpretación geométrica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.



Consideremos el sistema anterior.

Sabemos que cada ecuación se representa como una recta. Así:

cada punto (x, y) de la recta $y = 5 - x$ verifica la 1ª ecuación.

cada punto (x, y) de la recta $y = x - 1$ verifica la 2ª ecuación.

¿Cuál será la solución del sistema? Ha de ser un punto de las dos rectas para que sea solución de las dos ecuaciones: es el punto de intersección.

❑ Definiciones.

Vamos a dar las definiciones y las notaciones usuales a la hora de estudiar los llamados sistemas lineales de ecuaciones:

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un conjunto de igualdades de la forma:

$$[S]:\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & = & \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Donde:

- a_{ij} son números reales dados llamados coeficientes
- b_j son números reales dados llamados términos independientes
- x_i son las incógnitas, es decir, números reales desconocidos que deben verificar simultáneamente las m igualdades del sistema.

☞ Ejemplo: el sistema S es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Observa que no es un sistema lineal

$$S:\begin{cases} x+4\mathrm{y}=1 \\ x^2-y=5 \end{cases}$$

☞ Ejemplo: el sistema S es un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas.

$$S:\begin{cases} x+4y-3z=1 \\ 2x+3y+z=5 \end{cases}$$

Recordemos qué es una solución de un sistema y qué es resolverlo:

- Diremos que la sucesión de números reales $\left(s_1, s_2, \ldots, s_n\right)$ es una solución del sistema S si al sustituir en el sistema la incógnita x_i por s_i obtenemos m igualdades numéricas.
- Resolver un sistema es averiguar si un sistema tiene solución, encontrando todas sus soluciones, si las hubiera.

☞ Ejemplo: comprueba que la solución de S es $(x, y)=(1, -3)$

$$S:\begin{cases} x+2y=-5 \\ 3x+y=0 \\ x-y=4 \end{cases}$$

☞ Ejemplo: razona que el sistema S' no tiene solución

$$S':\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

3.Clasificación de los sistemas.

La siguiente clasificación de los sistemas lineales es la que comúnmente se usa, atendiendo al número de soluciones:

Es importante observar que un sistema lineal con solución, bien es compatible determinado bien indeterminado.

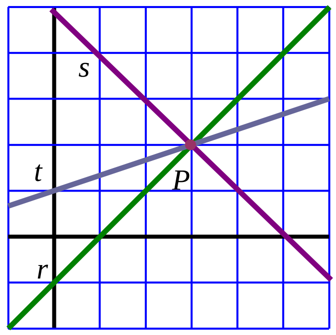
Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es:

- Incompatible si no tiene ninguna solución.
- Compatible determinado si tiene solución única.
- Compatible indeterminado si tiene infinitas soluciones.

☞ Ejemplo: El sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=5 \\ x-3y=-3 \end{cases}$$

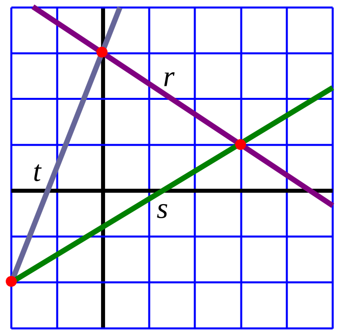
es compatible determinado. Podemos observar que la solución es $(x,\ y)=(3,\ 2)$ .Estamos ante tres rectas secantes en un punto.



☞ Ejemplo: El sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 3x-5y=4 \\ 5x-2y=-6 \end{cases}$$

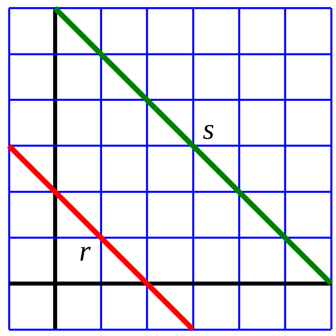
es incompatible. Estamos ante tres rectas secantes dos a dos, pero que no tienen ningún punto en común.



☞ Ejemplo: El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=6 \end{cases}$$

es claramente incompatible: no pueden cumplirse a la vez ambas igualdades. Estamos ante dos rectas paralelas.



4.Sistemas equivalentes

❑ Concepto.

Diremos que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

☞ Ejemplo: puede comprobarse que los sistemas siguientes

$$S_1:\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \quad S_2:\begin{cases} x+y=3 \\ 2x=2 \end{cases}$$

son equivalentes, ya que ambos tienen la misma única solución $(x,y)=(1,2)$.

❑ Transformaciones válidas en un sistema de ecuaciones.

Cuando resolvemos una ecuación o un sistema lo transformamos en otro equivalente cuya resolución esperamos que sea más fácil, o incluso algo trivial.

Aclaremos cuáles son esas transformaciones válidas a las que podremos someter un sistema de ecuaciones:

Si sometemos un sistema de ecuaciones a las siguientes transformaciones obtendremos un sistema equivalente:

- Permutar ecuaciones.
- Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.
- Añadir o suprimir una ecuación que es combinación lineal de otras.
- Sustituir una ecuación por otra que es el resultado de añadirle una combinación lineal de otras ecuaciones.

☞ Ejemplo: Los sistemas siguientes son equivalentes:

$$S:\begin{cases} x+2y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \quad \left| \begin{matrix} e'_1=e_1 \\ e'_2=e_2-e_1 \end{matrix} \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y=1 \\ -y=2 \end{cases}$$

☞ Ejemplo: Los sistemas siguientes son equivalentes:

$$S:\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x+y-2z=3 \end{cases} \quad \left| e'_3=e_1+e_2 \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x+y-2z=3 \\ 2x+3y-z=4 \end{cases}$$

5.Método de Gauss.

❑ Sistemas escalonados.

Los sistemas siguientes

$$S_1:\begin{cases} x+3y=1 \\ 2y=6 \end{cases} \quad \text{y} \quad S_2:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ 4z=-8 \end{cases}$$

Resuelve los sistemas escalonados.
Observa que son compatibles determinados.

se denominan escalonados.

Su resolución es muy simple: la última ecuación permite obtener una incógnita, al sustituir ésta en la anterior obtenemos el valor de otra, y así sucesivamente.

❑ Método de Gauss.

El método de Gauss es un procedimiento que pretende convertir todo sistema en otro que sea escalonado, usando las transformaciones que hemos visto en el punto anterior.

☞ Ejemplo: resolvamos el sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$S:\begin{cases} x+2y=-3 \\ 3x+y=1 \end{cases} \left| \begin{matrix} e'_1=e_1 \\ e'_2=e_2-3e_1 \end{matrix} \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y=-3 \\ -5y=10 \end{cases}$$

Ahora vamos hallando el valor de las incógnitas "escalonadamente":

$$\left| \begin{matrix} e_2 \;\rightarrow\; y=\dfrac{10}{-5}=-2 \\ e_1 \;\rightarrow\; x=-3-2y=-3+4=1 \end{matrix} \right.$$

Estamos ante un sistema compatible determinado cuya única solución es:
$(x,y)=(1,-2)$

☞ Ejemplo: observemos cómo se resuelve el sistema

$$S:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-z=0 \end{cases} \left| \begin{matrix} e'_2=e_2-e_1 \\ e'_2=e_3-2e_1 \end{matrix} \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ z=-2 \end{cases}$$

Estamos ante un sistema compatible determinado cuya única solución es:
$(x,y,z)=(11,-6,2)$

Ahora vamos hallando el valor de las incógnitas "escalonadamente":

$$\left| \begin{matrix} e_3 \;\rightarrow\; z=-2 \\ e_2 \;\rightarrow\; y=-2+2z=-6 \\ e_1 \;\rightarrow\; x=1-2y+z=11 \end{matrix} \right.$$

☞ Ejemplo: observemos cómo se resuelve el sistema

$$S:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-2z=0 \end{cases} \left| \begin{matrix} e'_2=e_2-e_1 \\ e'_2=e_3-2e_1 \end{matrix} \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ 0=-2 \end{cases}$$

Estamos ante un sistema incompatible.

Como vemos, la tercera ecuación se ha convertido en una igualdad absurda, que no puede cumplirse para ningún valor de las incógnitas. Esto significa que el sistema no tiene solución.

☞ Ejemplo: observemos cómo se resuelve el sistema

$$S:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-2z=2 \end{cases} \left| \begin{matrix} e'_2=e_2-e_1 \\ e'_2=e_3-2e_1 \end{matrix} \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

Como vemos, la tercera ecuación se ha convertido en una identidad, y nos hemos quedado con más incógnitas que ecuaciones. Vamos a pasar la incógnita z al segundo miembro y a expresar las otras incógnitas en función de ella:

$$\left| \begin{matrix} e_3 \;\rightarrow\; z=t \\ e_2 \;\rightarrow\; y=-2+2z=-2+2t \\ e_1 \;\rightarrow\; x=1-2y+z=5-3t \end{matrix} \right.$$

Estamos ante un sistema compatible indeterminado. Todas sus soluciones vienen dadas por

$$\text{Solución: } \begin{cases} x=5-3t \\ y=-2+2t \\ z=t \end{cases}$$

donde es t un número real cualquiera, denominado parámetro.

Si deseamos obtener soluciones numéricas concretas, damos a t valores numéricos concretos:

$$t=1 \ \rightarrow \ (x,\ y,\ z)=(2,\ 0,\ 1)$$
$$t=0 \ \rightarrow \ (x,\ y,\ z)=(5,\ -2,\ 0)$$
$$\ldots$$

Observemos que estamos ante un sistema compatible indeterminado. En ellos la solución queda expresada en función de uno o más parámetros.

Nota: a la hora de aplicar el método de Gauss podemos olvidarnos de las incógnitas y tratar sólo con los coeficientes y términos independientes. En el primer ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ \left| \begin{matrix} f_2-f_1 \\ f_3-2f_1 \end{matrix} \right\rangle \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

1. [S/99] Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2z=-1 \\ -x+y-2z=0 \end{cases}$$

2. [S/99] Resuelva y clasifique el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ x-4y-5z=1 \\ -2x+2y+4z=-2 \end{cases}$$

3. [S/99] Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{matrix} x+my+z=4 \\ x+3y+z=5 \\ mx+y+z=4 \end{matrix}\right\}$$

a) Resuélvalo y clasifíquelo para $m = 1$

b) Resuélvalo y clasifíquelo para $m = 2$.

4. [S/99] Resuelva el sistema para el valor $m = -1$:

$$\begin{cases} 2x+y+mz=-2 \\ x+2y+z=2 \\ my-2z=-4 \end{cases}$$

5. [S/00] Consideremos el siguiente sistema:

$$S:\begin{cases} x-9y+5z &= 33 \\ x+3y-z &= -9 \\ x-y+z &= 5 \end{cases}$$

a) Resuélvalo y clasifíquelo según el número de soluciones.

b) Determine si es o no posible eliminar una de las ecuaciones, de forma que el sistema que resulte sea equivalente al anterior.

6. [S/03] Clasifique y resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ x+2y+z=5 \end{cases}$$

7. [S/01] Resuelva el siguiente sistema e interprete gráficamente sus soluciones

$$\begin{matrix} 2x-y=5 \\ 4(x-2)=1+2(y+1) \end{matrix}$$

8. [S/01] Resuelva el sistema siguiente en cuanto al número de soluciones:

$$\begin{cases} 3x-2y-2z=3 \\ x-z=1 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

Clasifíquelo según el número de soluciones.

9. [S/03] Clasifique y resuelva el sistema

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-z=5 \\ 4x+7y-5z=15 \end{cases}$$

10. [S/04] Clasifique y resuelva el sistema

$$\begin{cases} x-y-z=-2 \\ 2x+3y-z=2 \\ 4x+y-3z=-2 \end{cases}$$

11. [S/05] Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y-z &= -2 \\ 2x-z &= 0 \\ -2y+z &= 4 \end{cases}$$

a) Resuélvalo y clasifíquelo.

b) Obtenga, si existe, una solución del sistema que verifique $x=2y$.

12. [S/05] Dado el sistema

$$S:\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 2x+3y-z &= 17 \\ 4x+5y+z &= 17 \end{cases}$$

a) Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones:

b) A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos?

13. [S/06] El cajero de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. El número de billetes de 10 euros que nos ha dado es el doble del de 20 euros.

Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero.

14.[S/06] Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones que permita encontrar la solución del siguiente problema:

"En un examen de Matemáticas que constaba de tres problemas, un alumno obtuvo una calificación total de 7.2. La puntuación del primer problema fue un 40% más que la del segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones del primero y el segundo. ¿Cuál fue la puntuación de cada problema?"

15.[S/07] Un taller de carpintería ha vendido 15 muebles, entre sillas, sillones y butacas, por un total de 1600 euros. Se sabe que cobra 50 euros por cada silla, 150 euros por cada sillón y 200 euros por cada butaca, y que el número de butacas es la cuarta parte del número que suman los demás muebles.

Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones adecuado que permite calcular cuántos muebles de cada clase ha vendido ese taller.

16.[S/07] Resuelva y clasifique el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y & = & 1+z \\ 2x+z & = & 2+y \\ y & = & z \end{array}\right\}$$

17.[S/07] Clasifique y resuelva el sistema formado por las tres ecuaciones siguientes:

$$x-3y+2z=0\ ;\ -2x+y-z=0\ ;\ x-8y+5z=0$$

18. Consideremos el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=0 \\ x+2y-z=-3 \\ 3x+2y=-1 \end{array}\right.$$

a) Resuélvalo por el método de Gauss y clasifíquelo.

b) Si fuese necesario, cambie una de las ecuaciones para que el sistema resultante sea compatible indeterminado. Razone la respuesta.

19. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=3 \\ x-y-z=5 \end{array}\right.$$

¿Es posible transformarlo en uno compatible indeterminado cambiando sólo la tercera ecuación?

Razone la respuesta y ponga un ejemplo.

20. Dado el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+3=0 \\ 2x+2y-12=0 \\ x+y+1=1 \end{array}\right\}$$

a) Resuélvalo.

b) Clasifíquelo tendiendo al número de soluciones.

c) Interpretelo geométricamente.

21. Resuelva los sistemas, usando el método de Gauss, y clasifíquelos según el número de soluciones:

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x-y+4z=1 \\ x+2y+2z=2 \\ 4x-7y+8z=-1 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x-5y-z=-3 \end{array}\right.$

22.[S/97]Un tren transporta 470 pasajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 6800 €

Calcula cuántos viajeros han pagado el importe total del billete que asciende a 16 €, cuántos han pagado el 80% del billete y cuántos el 50, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 50% es la mitad del número de viajeros que pagaron el 80%.

23.[S/98] Alumnos de dos grupos distintos, A y B, realizan un mismo examen de Matemáticas Aplicadas a las CC.SS. II. Se sabe que la nota media en el grupo A ha sido de 4'5 puntos y de 5'4 puntos en el B.

Calcule el nº de alumnos de cada grupo, sabiendo que los dos suman 72 alumnos y que la nota media de los 72 alumnos ha sido 4´95 puntos.

24.[S/98] Tres amigos, Marcos, Luis y Miguel, son aficionados a la música. Entre los tres poseen un total de discos compactos (CD) comprendidos entre 16 y 22. Marcos presta 4 CD a Miguel, Luis presta 1 CD a Marcos y Miguel presta 2 CD a Luis, con lo cual los tres amigos tienen ahora el mismo número de CD. ¿Cuántos CD pueden tener en total?

25.[S/98]Un vendedor dispone de tres tipos de piensos: A , B y C. A cierto ganadero le cobra 62 céntimos el kilo de una mezcla formada por una parte de pienso A, dos de B y tres de C.

A otro ganadero le cobra 48 céntimos el kilo de una mezcla formada por dos partes del pienso A y una del tipo B.

a) Averigüe el precio del kilo de una mezcla, a partes iguales, de cada tipo de pienso.

b) Hale el precio del kilo de cada tipo de pienso sabiendo que la mezcla, a partes iguales, de los tipos B y C cuesta 65 céntimos el kilo.

26.[S/98] De tres cantidades distintas $r < s < t$ se sabe que la suma de las tres es igual a 113, que al dividir la mayor entre la menor se obtiene un cociente igual a 6 y un resto igual a 4, y que al dividir la mayor entre la cantidad intermedia se obtiene un cociente igual a 2 y un resto igual a 6.

Calcule el valor de cada cantidad.

27.[S/99] Un comerciante ha vendido 600 camisetas por un total de 6380 €. Su precio original era de 12 € por camiseta, pero ha vendido en las rebajas una parte de ellas con un descuento del 30% del precio original y otra parte con un descuento del 40%.

Sabiendo que el número total de camisetas rebajadas fue la mitad del número de las que vendió a 12 €, ¿cuántas camisetas vendió a cada precio?

28.[S/99]En una tienda, un cliente se ha gastado 150 € en la compra de 12 artículos entre discos, libros y carpetas. Cada disco le ha costado 20 €, cada libro 15 € y cada carpeta 5 €. Se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que de libros.

a) Formule un sistema de ecuaciones asociado al enunciado anterior.

b) ¿Cuántos artículos ha comprado de cada tipo?

29.[S/99] Una heladería prepara helados de tres tamaños, 125 gr, 250 gr y 500 gr, cuyos precios son 1'50 €, 2'70 € y 4'95 €, respectivamente. Un cliente compra 10 helados, con un peso total de 2'5 kg, y paga por ellos 26'70 €. Se desea conocer el número de helados que ha comprado de cada tipo.

a) Formule el sistema de ecuaciones asociado.

b) Halle el número de helados de cada tipo.

30.[S/00] Una empresa de repostería tiene 10 vehículos entre motocicletas (2 ruedas), turismos (4 ruedas) y pequeños camiones de reparto (6 ruedas). El impuesto municipal, por vehículo es de 20 €, 50 € y 80 €, respectivamente. Sabiendo que ha pagado un total de 410 € por este concepto y que el total de ruedas de sus vehículos es de 34, ¿cuántos vehículos tiene de cada tipo?

31.[S/01] Un establecimiento pone a la venta tres tipos de camisas A, B y C. Se sabe que la razón entre los precios de las camisas C y B es 19/18 y entre los de B y A es 6/5. Al comprar tres camisas, una de cada clase, se pagan 13000 pts. Plantee el sistema de ecuaciones que permita conocer el precio de cada camisa.

32.[S/01] Determine dos números sabiendo que al dividir el mayor por el menor obtenemos 7 de cociente y 2 de resto, y que la diferencia entre el triple del mayor y el menor es 106.

33.[S/02] Un autobús transporta 90 viajeros con 3 tarifas diferentes:

1) Los que pagan el billete completo: 0,70 euros.
2) Estudiantes, con descuento del 50%.
3) Jubilados, con descuento del 80%.

Sabemos que el nº de estudiantes es 10 veces el de jubilados y que la recaudación total ha sido de 46,76 euros. Determine el nº de viajeros de cada tarifa.

34.[S/02] Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 euros por 24 litros de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 litros de aceite de oliva.

Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular el precio unitario de cada artículo, sabiendo que 1 litro de aceite cuesta el triple que uno de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 litros de aceite más 4 litros de leche.

35.[S/03] Un inversor compró acciones de las empresas A , B y C por un valor total de 20000 euros, invirtiendo en C el doble que en A. Al cabo de un año la empresa A le pagó el 6% de beneficio, la B el 8% y la C el 10%.

Si el beneficio total fue de 1720 euros, ¿qué dinero invirtió en cada empresa?

36.[S/04] Sabemos que el precio del kilo de tomates es la mitad que el del kilo de carne. Además el precio del kilo de gambas es el doble que el de carne.

Si pagamos 18 euros por 3 kilos de tomates, 1 kilo de carne y 250 gramos de gambas, ¿cuánto pagaríamos por 2 kilos de carne, 1 kilo de tomates y 500 gramos de gambas?

37.[S/04] Un monedero contiene 1 euro en monedas de 2, 5 y 10 céntimos; en total hay 22 monedas. Sabiendo que el número de monedas de 5 y 10 céntimos juntas excede en 2 unidades al número de monedas de 2 céntimos, obtenga el número de monedas de cada tipo que hay en el monedero.

38.[S/06] Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones que permita encontrar la solución del siguiente problema:

En un examen de Matemáticas que constaba de tres problemas, un alumno obtuvo una calificación total de 7.2. La puntuación del primer problema fue un 40% más que la del segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones del primero y el segundo. ¿Cuál fue la puntuación de cada problema?

39.[S/06] El cajero de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. El número de billetes de 10 euros que nos ha dado es el doble del de 20 euros.

Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero.

40. Un grupo de 20 personas se reúne para ir de excursión. El número total de hombres y mujeres es igual al triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres. ¿Cuántas mujeres, niños y hombres hay?

41. Un cine ha proyectado una determinada película sólo tres días: el lunes, el martes y el miércoles de la semana pasada. Se sabe que el número de espectadores del martes se incrementó en un 12% respecto del lunes, que el miércoles ese número disminuyó un 12% respecto del martes y que el lunes ese número superó en 36 espectadores al del miércoles.

Calcule el número de espectadores que vieron la película cada uno de los tres días.

42. Una tienda vende una clase de calcetines a 12 € el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30% de descuento sobre el precio inicial, y en el segundo mes un 40% también sobre el precio inicial.

Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 5976 € y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total, ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado el descuento del 40%?

43. Mezclando tres productos, digamos X, Y y Z, debemos obtener 10 kg. de pienso que contenga 19 unidades de hidratos de carbono y 12 unidades de grasa.

Sabiendo que cada kilo de X contiene una unidad de hidratos de carbono y dos unidades de grasa, que cada kilo del producto Y contiene dos unidades de hidratos de carbono y unidad de grasa, y que cada kilo del producto Z contiene cuatro unidades de hidratos de carbono y nada de grasa, ¿cuántos kilos de cada producto debemos poner?

44. Una ganadera da a su ganado una mezcla de dos tipos de piensos A y B. Un kilo de pienso A proporciona a una res el 6% de sus necesidades diarias de proteínas y el 14% de sus necesidades de carbohidratos.

Un kilo de B contiene el 35% del requerimiento diario de proteínas y el 15% de carbohidratos.

Si la ganadera desea que su ganado tenga cubiertas, pero sin excedentes, sus necesidades diarias de proteínas y carbohidratos, ¿cuántos Kg. de cada tipo de pienso deberá proporcionar a cada res?

45. En una cafetería, los ocupantes de una mesa abonaron 335 pta por dos cafés, una tostada y dos refrescos; mientras que los de otra mesa pagaron 655 pta por cuatro cafés, tres tostadas y tres refrescos.

a) ¿Cuánto han de pagar los clientes de una tercera mesa si han consumido dos cafés y tres tostadas?

b) Con los datos que se dan, ¿puedes calcular cuánto vale un café? Justifica la respuesta.

46. Dos marcas de detergente, *Blancol* y *Límpex*, se disputan el mercado de una cierta región. A comienzos de año ambas lanzan sendas campañas de publicidad con objeto de captar clientes.

A lo largo de la campaña, *Blancol* logra atraer al 20% de los clientes que tenía *Límpex* a comienzos de año. A su vez, *Límpex* consigue captar el 30% de los clientes que tenía *Blancol* a comienzos de año. Si al final de las campañas la marca *Límpex* tiene el 55% del mercado, ¿qué porcentaje tenía al comienzo?

47. Una fábrica de electrodomésticos tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica abastece a tres establecimientos –digamos A, B y C–, que demandan toda su producción.

En una determinada semana el establecimiento A solicitó tantas unidades como B y C juntos y, por otro lado, B solicitó un 20% más que la suma de la mitad de lo que pidió A más la tercera parte de lo que pidió C.

¿Cuántas unidades solicitó cada establecimiento dicha semana?

48. Al representar en el plano las ecuaciones de un sistema formado por tres ecuaciones (e_1, e_2, e_3) y dos incógnitas, se observa que e_1 es una recta paralela al eje **X**, e_1 y e_2 se cortan en el punto $(-1,\ 2)$, e_2 y e_3 se cortan en el punto $(2,\ 0)$ y e_3 es paralela al eje **Y**. Obtenga las ecuaciones del sistema.

49. En caso de que el siguiente sistema sea compatible para algún valor del parámetro t, resuélvelo:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x+y=2t \\ tx+y=2 \end{cases}$$

50. Determina el valor de m para que S tenga:

$$S:\begin{cases} x+2y=8 \\ x-my=4 \end{cases}$$

a) Solución única.

b) Solución múltiple.

c) Ninguna solución.

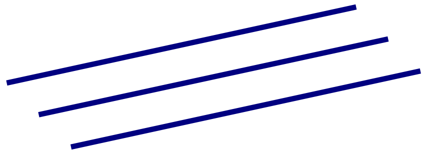
d) La solución $x=8$.

e) La solución $x=0$.

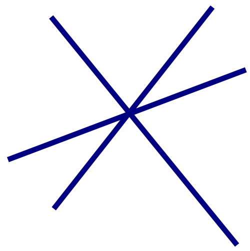
Cuestiones

1. Escribe tres sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas cuya interpretación geométrica, en cada caso, se corresponda con las siguientes representaciones:

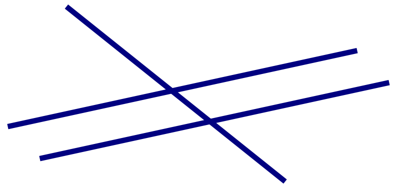
a) Tres rectas paralelas:



b) Tres rectas secantes:



c) Dos paralelas y una secante con cada una de ellas:



2. Si a un sistema incompatible de dos ecuaciones con dos incógnitas le añadimos una tercera ecuación, ¿podríamos lograr que fuese compatible indeterminado? Razona la respuesta.

3. Escribe un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas de modo que $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$ sea una solución. Resuelve luego el sistema.

4. Escribe, cuando sea posible, sistemas de ecuaciones que respondan a las características siguientes:

a) Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones.

b) Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible y determinado.

c) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que no tenga ninguna solución.

d) Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única.

Razona, en cada caso, tu respuesta.

5. Sean S y S' dos sistemas distintos de ecuaciones lineales con los mismos coeficientes.

a) Justifica con un ejemplo que S puede ser compatible y S' incompatible.

b) Si los dos sistemas son compatibles, ¿puede tener S solución única y S' infinitas soluciones? Justifica la respuesta.

6. Un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede ser compatible y determinado? En caso afirmativo, da un ejemplo.

7. Halle la posición relativa de las dos rectas del plano definidas por las ecuaciones

$$x+\frac{1}{2}y=6 \quad , \quad 2x+y=6$$

Autoevaluación

1. Resuelve por el método de reducción de Gauss el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 5x+2y+4z=9 \\ 2x+2y+z=3 \\ x-2y+2z=3 \end{cases}$$

Clasifícalo atendiendo al número de soluciones.

2. Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$S \equiv \begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

a) Clasifícalo y resuélvelo.

b) Añade razonadamente a S una tercera ecuación de forma que el sistema resultante sea incompatible.

c) Añade razonadamente a S una tercera ecuación de forma que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

3. Dado el sistema de ecuaciones:

$$S \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=4 \\ x-3y=0 \end{cases}$$

a) Resuélvelo y clasifícalo.

b) Interpreta geométricamente el sistema en unos ejes cartesianos.

4. Escribe, si es posible, un sistema que cumpla las condiciones siguientes:

a) Compatible determinado de dos ecuaciones con tres incógnitas.

b) Compatible determinado de tres ecuaciones con tres incógnitas.

c) Incompatible de dos ecuaciones con cuatro incógnitas.

d) Compatible indeterminado de tres ecuaciones con tres incógnitas.

5. Una laboratorio farmacéutico distribuye envasados tres tipos de compuestos (A, B y C), utilizados para elaborar medicamentos.

Los precios y pesos de los envases de cada compuesto vienen detallados en la tabla siguiente:

Envase de	***Peso (g)***	***Precio (€)***
A	250	1
B	500	1'80
C	1.000	3'30

A una farmacia le ha suministrado un lote de 5 envases, con un peso total de 2'5 kg por un importe de 8'90 €.

¿Cuántos envases de cada clase ha comprado la farmacia?

Autoevaluación

1. Aplicamos el método de Gauss para escalonar:

$$S:\ \left|e_3\leftrightarrow e_1\right\rangle \begin{cases} x-2y+2z=3\\ 2x+2y+z=3\\ 5x+2y+4z=9\end{cases} \left|\begin{matrix} e_2-2e_1\\ e_3-5e_1\end{matrix}\right\rangle$$

$$\begin{cases} x-2y+2z=3\\ 6y-3z=-3\\ 12y-6z=-6\end{cases} \left|\begin{matrix} e_2:3\\ e_3-2e_2\end{matrix}\right\rangle \begin{cases} x-2y+2z=3\\ 2y-z=-1\\ 0=0\end{cases}$$

Como podemos apreciar, el sistema es compatible indeterminado.

Vamos a resolverlo:

$$\left|\begin{matrix} e_3\rightarrow y=t\\ e_2\rightarrow 2y-z=-1\rightarrow z=1+2t\\ e_1\rightarrow x=1-2t\end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \begin{cases} x=1-2t\\ y=t\\ z=1+2t\end{cases}$$

2.

a) Restando a la segunda ecuación la primera tendremos un sistema escalonado:

$$S:\ \left|e_2-e_1\right\rangle \begin{cases} x+y+2z=1\\ -3y-z=-1\end{cases}$$

Como podemos apreciar, el sistema es compatible indeterminado. Haciendo $y=t$:

$$\left|\begin{matrix} e_2\rightarrow z=1-3y\rightarrow z=1-3t\\ e_1\rightarrow x=-1+5t\end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \begin{cases} x=-1+5t\\ y=t\\ z=1-3t\end{cases}$$

b) Escribimos una igualdad que no pueda cumplirse a la vez, por ejemplo, que la primera. Una posibilidad es:

$$S':\begin{cases} x+y+2z=1\\ x-2y+z=0\\ x+y+2z=2\end{cases}$$

c) Basta añadir una ecuación que sea combinación lineal de las dos primeras. Sirve el doble de la segunda ecuación:

$$S'':\begin{cases} x+y+2z=1\\ x-2y+z=0\\ 2x-4y+2z=0\end{cases}$$

3. Vamos con la tercera:

a) Resolvemos el sistema formado por las dos primeras ecuaciones, obteniendo

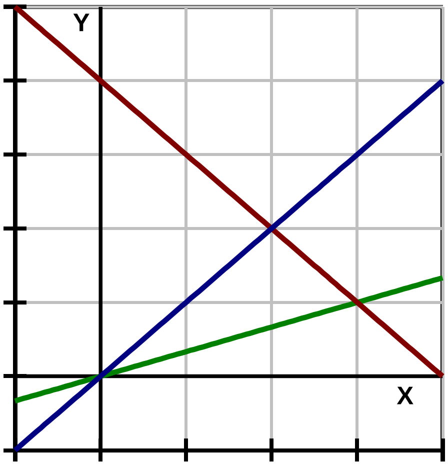
$$(x,y)=(2,2)$$

Y ahora comprobamos esa solución en la tercera ecuación:

$$2-3\cdot 2=0\ \rightarrow\ -4=0\ \text{¡NO!}$$

Como vemos, el sistema es incompatible.

b) Cada ecuación se representa en el plano como una recta. Cada uno de sus puntos es una solución de la correspondiente ecuación:



Se trata de tres rectas secantes dos a dos. Pero las tres no son secantes en ningún punto.

4.

a) Es imposible, ya que un sistema con más incógnitas que ecuaciones bien es incompatible bien es compatible indeterminado. Nunca puede tener solución única.

b) Tomemos, por ejemplo, $x=1$, $y=2$, $z=3$

Y escribamos un sistema escalonado con ellos:

$$S:\begin{cases} x+y+z=6\\ y+z=5\\ z=3\end{cases}$$

c) Basta escribir dos igualdades que no puedan cumplirse a la vez:

$$\begin{cases} a+b+c+d=1\\ a+b+c+d=2\end{cases}$$

d) Escribimos dos ecuaciones compatibles y le añadimos, por ejemplo, la suma de ambas:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ y+z=5 \\ 2y+2z=10 \end{cases}$$

5. Pongamos que la farmacia ha comprado

x envases del compuesto A

y envases del compuesto B

z envases del compuesto C

Como en total son cinco envases:

$$x+y+z=5$$

Como el peso total son 2.500 gramos:

$$250x+500y+1000z=2500$$

Como el precio total ha sido 8´90 euros.:

$$x+1'80y+3'30z=8'90$$

Simplificando adecuadamente obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ x+2y+4z=10 \\ 10x+18y+33z=89 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 2,\ 1)$$

Resulta, pues, que ha comprado dos envases del compuesto *A*, dos del compuesto *B* y uno del *C*.