MODELOS DE SELECTIVIDAD – ANDALUCÍA

Instrucciones

1. Elige entre realizar bien los tres ejercicios de la Opción A, bien los tres ejercicios de la Opción B, sin mezclar los de una opción con los de otra.
2. El ejercicio de Álgebra vale 3 puntos, el de Análisis 3 puntos y el Probabilidad y Estadística 4 puntos.
3. Contesta las preguntas razonando tus conclusiones; la mera respuesta numérica no vale para obtener la puntuación máxima en cada apartado. Justifique siempre las respuestas.
4. Escribe de forma ordenada y con letra clara.
5. Se permite el uso de una calculadora no programable y no gráfica. Si obtiene resultados directamente con ella, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda.

Tiempo

90 minutos

Criterios de Evaluación

Los criterios esenciales de valoración serán el planteamiento razonado y la ejecución técnica del mismo. La mera descripción del planteamiento sin que se lleve a cabo de forma efectiva no puede ser suficiente para obtener una valoración positiva del mismo.

En los ejercicios en los que se pida una deducción razonada, la mera aplicación de un fórmula no será suficiente.

No se prohibirá el uso de calculadoras, aunque durante el examen no se permitirá el préstamo de ellas entre estudiante. En cualquier caso, los procesos que conducen al resultado deben estar razonados.

Los errores cometidos en un apartado no se tendrán en cuenta en la calificación de apartados posteriores que sean afectados.

Los errores no conceptuales en las operaciones se penalizarán con un máximo del 10% de la nota total del ejercicio.

La presentación clara y ordenada se valorará positivamente.

Modelo 1

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) [1] Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2=A$.

b) [1] Igualmente para que $B+C=A-I$.

c) [1] Determine x para que $A+B+C=3\cdot I_2$.

EJERCICIO 2 [3]

a) [1,5] Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+a & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x^2+bx+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Halle a y b para que la función sea continua y derivable.

b) [1,5] Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x)=\frac{3}{(2x+5)^2}+L(1-x) \quad , \quad h(x)=\frac{e^x}{x^3+1}$$

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Se tienen dos dados, uno (A) con dos caras rojas y cuatro verdes, y otro (B) con dos caras verdes y cuatro rojas. Se lanza una moneda; si sale cara se arroja el dado A y si sale cruz el dado B.

a) [1] Halle la probabilidad de obtener una cara de color rojo.

b) [1] Si sabemos que ha salido una cara de color verde en el dado, ¿cuál es la probabilidad de que en la moneda haya salido cara?

Parte 2 [2]

El salario de los trabajadores de una ciudad sigue una distribución Normal con desviación típica 15 euros. Se quiere calcular un intervalo de confianza para el salario medio con un nivel de confianza del 98%. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que se necesitaría recoger para que el intervalo de confianza tenga una amplitud, como máximo, de 6 euros.

Modelo 1

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

Un Ayuntamiento concede licencia para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos *A* y *B*.

Para ello la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de construcción de la vivienda de tipo *A* de 100 000 euros y la de tipo *B* 300 000 euros.

Si el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo *A* asciende a 20 000 euros y por una de tipo *B* a 40 000 euros, ¿cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener un beneficio máximo? .

EJERCICIO 2

a) [1,5] Determine dónde se alcanza el mínimo de la función $f(x)=3x^2-6x+a$. Calcule el valor de a para que el valor mínimo de la función sea 5.

b) [1,5] Calcule g'(3), siendo $g(x)=2x\cdot e^{3x-1}$

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

En una población, el porcentaje de personas que ven un determinado programa de televisión es del 40%. Se sabe que el 60% de las personas que lo ven tiene estudios superiores y que el 30% de las personas que no lo ven no tiene estudios superiores.

a) [0.75] Calcule la probabilidad de que una persona vea dicho programa y tenga estudios superiores.

b) [1.25] Halle la probabilidad de que una persona que tiene estudios superiores vea el citado programa.

Parte 2 [2]

En una encuesta representativa realizada a 1230 personas de una ciudad, se obtuvo como resultado que 654 de ellas van al cine los fines de semana. Calcule un intervalo de confianza, al 97%, para la proporción de asistencia al cine los fines de semana en dicha ciudad.

Modelo 2

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$

a) [1] Determine la matriz inversa de A.

b) [2] Halle los valores de x, y, z para los que se cumple $A \cdot X = Y$.

EJERCICIO 2 [3]

Para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x)=8x^3-84x^2+240x$, determine:

a) [1.5] Su monotonía y sus extremos relativos.

b) [1.5] Su curvatura y su punto de inflexión.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

La baraja española consta de diez cartas de oros, diez de copas, diez de espadas y diez de bastos. Se extraen dos cartas. Calcule razonadamente la probabilidad de que, al menos, una de las dos cartas sea de espadas en los siguientes supuestos:

a) [1] Si se extraen las cartas con reemplazamiento.

b) [1] Si se extraen las cartas sin reemplazamiento.

Parte 2 [2]

En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17.4 años. Se sabe que la desviación típica de la población Normal de la que procede esa muestra es de 2 años.

a) [1] Obtenga un intervalo de confianza al 95% para la edad media de la población.

b) [1] ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza, al 90%, tenga de amplitud a lo sumo 0.5?

Modelo 2

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

Consideramos el recinto del plano limitado por las siguientes inecuaciones:

$$x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \ ; \ y - x \leq 4 \ ; \ y + 2x \geq 7 \ ; \ -2x - y + 13 \geq 0$$

a) [2] Represente el recinto y calcule sus vértices.

b) [1] Halle en qué puntos de ese recinto alcanza los valores máximo y mínimo la función $F(x, y) = 4x + 2y - 1$.

EJERCICIO 2 [3]

a) [2] Halle los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto $(1, 5)$ sea la recta $y = 3x + 2$.

b) [1] Para $g(x) = e^{1-x} + L(x+2)$, calcule $g'(1)$.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

En una urna hay cuatro bolas blancas y dos rojas. Se lanza una moneda, si sale cara se extrae una bola de la urna y si sale cruz se extraen, sin reemplazamiento, dos bolas de la urna.

a) [1] Calcule la probabilidad de que se hayan extraído dos bolas rojas.

b) [1] Halle la probabilidad de que no se haya extraído ninguna bola roja.

Parte 2 [2]

En una granja avícola se ha tomado una muestra aleatoria de 200 polluelos de pato, entre los cuales se encontraron 120 hembras.

a) [1.5] Halle un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para la proporción de hembras entre estos polluelos.

b) [0.5] Razone, a la vista del intervalo encontrado, si a ese nivel de confianza puede admitirse que la verdadera proporción de hembras de pato en esa granja es 0.5.

Modelo 3

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones:

$$x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \ ; \ 4x+3y \geq 60 \ ; \ y \leq 73 \ ; \ x \leq \frac{10+y}{2}$$

a) [2] Represente gráficamente la región factible del problema y calcule sus vértices.

b) [0.5] Maximice en esa región factible la función objetivo $F(x, y)=x+3y$.

c) [0.5] ¿Pertenece el punto $(11, 10)$ a la región factible?

EJERCICIO 2 [3]

Para la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2+mx+5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

a) [1] Calcule m para que la función sea continua en $x = 1$.

b) [1] Para ese valor de m, ¿es derivable la función en $x = 1$?

c) [1] Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

Parte 1 [2]

En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica

$$p(A \cap B)=0{,}1 \quad , \quad p(A^c \cap B^c)=0{,}6 \ \text{ y } \ p(A/B)=0{,}5$$

a) [0.75] Calcule $p(B)$.

b) [0.75] Calcule $p(A \cup B)$.

c) [0.5] ¿Son A y B independientes?

Parte 2 [2]

Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley Normal de media 36 y desviación típica 4,8.

a) [1] Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?

b) [1] ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?

Modelo 3

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

a) [1.5] Halle la matriz A que verifica

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

b) [1.5] Clasifique y resuelva el sistema formado por las tres ecuaciones siguientes:

$$x-3y+2z=0\ ;\ -2x+y-z=0\ ;\ x-8y+5z=0.$$

EJERCICIO 2 [3]

a) [2] Sea la función definida para todo número real x por $f(x)=ax^3+bx$. Determine a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1,1)$ y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es -3 .

b) [1] Si en la función anterior $a=\frac{1}{3}$ y $b=-4$, determine sus intervalos de monotonía y sus extremos.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Una urna *A* contiene tres bolas azules y cuatro rojas y otra urna *B* contiene dos bolas azules, dos rojas y dos negras. Se extrae, al azar, una bola de una de las urnas.

a) [1] Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

b) [1] Si la bola extraída resulta ser azul, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna *B*?

Parte 2 [2]

Se sabe que $(45.13, 51.03)$ es un intervalo de confianza, al 95%, para la media de una

variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 15.

a) [0.5] ¿Cuál es el error cometido?

b) [1.5] Calcule, con el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral mínimo necesario para que el error no sea superior a 1.8.

Modelo 4

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

a) [1.5] Sean la matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

Halle el valor de b para que $B^2=I_2$

b) (1.5 puntos) Resuelva y clasifique el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y & = & 1+z \\ 2x+z & = & 2+y \\ y & = & z \end{array}\right\}$$

EJERCICIO 2 [3]

Se considera la función f definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x+1} & \text{si } x\leq 0 \\ x^2+2x-3 & \text{si } x>0 \end{cases}$

a) [1] Estudie su derivabilidad en $x = 0$.

b) [1] Determine si existen asíntotas y obtenga sus ecuaciones .

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

En un espacio muestral se consideran dos sucesos A y B tales que:

$$p(A\cup B)=1 \quad , \quad p(A\cap B)=\frac{1}{6} \text{ y } p(A/B)=\frac{1}{3}$$

Halle las probabilidades de los sucesos A y B.

Parte 2 [2]

En una Universidad se toma, al azar, una muestra de 400 alumnos y se observa que 160 de ellos han aprobado todas las asignaturas.

a) [1] Halle un intervalo de confianza, al 97%, para estimar el porcentaje de alumnos de esa Universidad que aprueban todas las asignaturas.

b) [1] A la vista del resultado anterior se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error no sea superior a 0.04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos alumnos, como mínimo, ha de tener la muestra?

Modelo 4

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

Una empresa fabrica lunas para coches. Cada luna delantera requiere 2.5 m^2 de cristal, mientras que cada luna trasera requiere 2 m^2 .

La producción de una luna delantera precisa 0.3 horas de máquina de corte y cada luna trasera 0.2 horas. La empresa dispone de 1750 m 2 de cristal por semana y 260 horas semanales de máquina de corte.

Para adaptarse a la demanda habitual, la empresa fabrica siempre, como mínimo, el doble de lunas delanteras que de lunas traseras.

Determine cuántas lunas de cada tipo debe fabricar semanalmente la empresa para que el número total de lunas sea máximo.

EJERCICIO 2 [3]

Se considera la función $f(x)=x^3-9x^2+24x$.

a) [2] Determine los extremos relativos de f ; estudie la monotonía y la curvatura.

b) [1] Represente gráficamente la función f .

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Un experimento aleatorio consiste en lanzar simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) [0.5] Obtener dos unos.

b) [0.5] Obtener al menos un dos.

c) [0.5] Obtener dos números distintos.

d) [0.5] Obtener una suma igual a cuatro.

Parte 2 [2]

Para realizar una encuesta en un Instituto se selecciona, aleatoriamente, una muestra de 50 alumnos y se les pregunta si tienen reproductores de mp3, contestando afirmativamente 20 de ellos. Calcule un intervalo de confianza, al 96%, para la proporción de alumnos que poseen reproductores de mp3 en la población total de alumnos del Instituto.

Modelo 5

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

a) [1] Un taller de carpintería ha vendido 15 muebles, entre sillas, sillones y butacas, por un total de 1600 euros. Se sabe que cobra 50 euros por cada silla, 150 euros por cada sillón y 200 euros por cada butaca, y que el número de butacas es la cuarta parte del número que suman los demás muebles.

Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones adecuado que permite calcular cuántos muebles de cada clase ha vendido ese taller.

b) [2] Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

resuelva la ecuación matricial $A\cdot X+B^t=B$.

EJERCICIO 2 [3]

Dada la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-8x+6 & \text{si } x\le 1\\ -2x^2+8x-6 & \text{si } x>1\end{cases}$$

a) [1.5] Estudie la continuidad y derivabilidad de f.

b) [1] Represente la gráfica de f.

c) [0.5] Indique los extremos relativos de la función.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

El 30% de los clientes de una tienda de música solicita la colaboración de los dependientes y el 20% realiza una compra antes de abandonar la tienda. El 15% de los clientes piden la colaboración de los dependientes y hacen una compra.

a) [1] Calcule la probabilidad de que un cliente ni compre, ni solicite la colaboración de los dependientes.

b) [1] Sabiendo que un cliente ha realizado una compra, ¿cuál es la probabilidad de que no haya solicitado colaboración a los dependientes?

Parte 2 [2]

Se ha lanzado al aire una moneda 200 veces y se ha obtenido cara en 120 ocasiones.

a) [1] Estime, mediante un intervalo de confianza, al 90%, la probabilidad de obtener cara.

b) [1] Se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error cometido sea inferior a 0.03, con un nivel de confianza del 97%. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

Modelo 5

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

La candidatura de un determinado grupo político para las elecciones municipales debe cumplir los siguientes requisitos: el número total de componentes de la candidatura debe estar comprendido entre 6 y 18 y el número de hombres (x) no debe exceder del doble del número de mujeres (y).

a) [2.5] Represente el recinto asociado a estas restricciones y calcule sus vértices.

b) [0.5] ¿Cuál es el mayor número de hombres que puede tener una candidatura que cumpla esas condiciones?

EJERCICIO 2 [3]

Sea la función $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-k}{x+1} & \text{si} \quad x>0 \\ x^2+2x+1 & \text{si} \quad x\le 0 \end{cases}$$

a) [2] Calcule el valor de k para que la función f sea continua en $x = 0$. Para ese valor de k, ¿es f derivable en $x = 0$?

b) [1] Para $k = 0$, calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Parte 1 [2]

En un Instituto se pueden practicar dos deportes: fútbol y baloncesto. Se sabe que el 48% de los alumnos practica fútbol pero no baloncesto, que el 15% practica baloncesto pero no fútbol y que el 28% no practica ninguno de los dos. Si se toma, al azar, un alumno de ese Instituto, calcule la probabilidad de que:

a) [0.75] Practique fútbol.

b) [0.5] Practique alguno de los dos deportes.

c) [0.75] No practique fútbol, sabiendo que practica baloncesto.

Parte 2 [2]

Una variable aleatoria sigue una ley Normal con media desconocida y desviación típica 2'4. Se quiere Con los datos de una muestra aleatoria se estima que el porcentaje de hogares con conexión a Internet es del 30%, con un error máximo de la estimación de 0.06 y un nivel de confianza del 93%.

a) [0.5] Obtenga el intervalo de confianza, al 93%, de la proporción de hogares con conexión a Internet.

b) [1.5] Calcule el tamaño mínimo de la muestra utilizada.

Modelo 6

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) [1.5] Calcule $B \cdot B^t - A \cdot A^t$.

b) [1.5] Halle la matriz X que verifica $(A \cdot A^t) \cdot X = B$.

EJERCICIO 2 [3]

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$f(x)=\begin{cases} -5x^2+40x-60 & \text{si} \quad 0 \le x \le 6 \\ \dfrac{5x}{2}-15 & \text{si} \quad 6 < x \le 10 \end{cases}$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

a) [0.75] Represente la función f .

b) [0.75] Calcule el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas.

c) [0.75] ¿Para qué gastos en publicidad se producen beneficios nulos?

d) [0.75] Calcule el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Se lanza una moneda tres veces y se consideran los sucesos:

A: "Obtener al menos dos veces cara" y B: "Obtener cara en el segundo lanzamiento".

a) [1] Describa el espacio muestral asociado al experimento. Calcule $p(A)$ y $p(A \cup B)$.

b) [1] Los sucesos A y B, ¿son independientes?, ¿son incompatibles?

Parte 2 [2]

En una población una variable aleatoria sigue una ley Normal con desviación típica 8.

Se ha elegido, al azar, una muestra de tamaño 100 y su media ha sido 67.

a) [1] Calcule el intervalo de confianza, al 93%, para la media de la población.

b) [1] ¿Cuántos datos, como mínimo, son necesarios para estimar, con un nivel de confianza del 99%, la media de la población con un error no superior a 2?

Modelo 6

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

Una fábrica produce bombillas de bajo consumo que vende a 1 euro cada una, y focos halógenos que vende a 1.5 euros. La capacidad máxima de fabricación es de 1000 unidades, entre bombillas y focos, si bien no se pueden fabricar más de 800 bombillas ni más de 600 focos.

Se sabe que la fábrica vende todo lo que produce. Determine cuántas bombillas y cuántos focos debe producir para obtener los máximos ingresos posibles y cuáles serían éstos.

EJERCICIO 2 [3]

a) [1.5] La función $f(x)=x^3+ax^2+bx$ tiene un extremo relativo en $x=2$ y un punto de inflexión en $x=3$. Calcule los coeficientes *a* y *b* y determine si el citado extremo es un máximo o un mínimo relativo.

b) [1.5] Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\frac{x}{x-2}$ en el punto de abscisa x = 3.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

En un tribunal se han examinado 140 alumnos de un Instituto *A* y 150 de otro Instituto *B*. Aprobaron el 80% de los alumnos del *A* y el 72% del *B*.

a) [1] Determine el tanto por ciento de alumnos aprobados por ese tribunal.

b) [1] Un alumno, elegido al azar, no ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al Instituto *B*?

Parte 2 [2]

Para estimar la proporción de estudiantes de una Universidad que está a favor de un aumento del importe de las becas, se entrevistó, aleatoriamente, a 500 estudiantes, de los cuales 465 respondieron afirmativamente. Calcule el intervalo de confianza, al 98%, en el cual se hallará la proporción de la población universitaria que está a favor del aumento de la cuantía de las becas.