Instrucciones

1. Elige entre realizar bien los tres ejercicios de la Opción A, bien los tres ejercicios de la Opción B, sin mezclar los de una opción con los de otra.
2. El ejercicio de Álgebra vale 3 puntos, el de Análisis 3 puntos y el Probabilidad y Estadística 4 puntos.
3. Contesta las preguntas razonando tus conclusiones; la mera respuesta numérica no vale para obtener la puntuación máxima en cada apartado. Justifique siempre las respuestas.
4. Escribe de forma ordenada y con letra clara.
5. Se permite el uso de una calculadora no programable y no gráfica. Si obtiene resultados directamente con ella, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda.

Tiempo

90 minutos

Criterios de Evaluación

Los criterios esenciales de valoración serán el planteamiento razonado y la ejecución técnica del mismo. La mera descripción del planteamiento sin que se lleve a cabo de forma efectiva no puede ser suficiente para obtener una valoración positiva del mismo.

En los ejercicios en los que se pida una deducción razonada, la mera aplicación de un fórmula no será suficiente.

No se prohibirá el uso de calculadoras, aunque durante el examen no se permitirá el préstamo de ellas entre estudiante. En cualquier caso, los procesos que conducen al resultado deben estar razonados.

Los errores cometidos en un apartado no se tendrán en cuenta en la calificación de apartados posteriores que sean afectados.

Los errores no conceptuales en las operaciones se penalizarán con un máximo del 10% de la nota total del ejercicio.

La presentación clara y ordenada se valorará positivamente.

Modelo 1

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo, que vende a 120 euros cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo. ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál sería dicho ingreso?

EJERCICIO 2 [3]

a) [1] Halle la función derivada de la función $f(x)=L\left(\frac{x}{x+1}\right)$ y simplifique el resultado.

b) [1] Obtenga las asíntotas de la función $f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$.

c) [1] Obtenga los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

En cierto barrio hay dos panaderías. El 40% de la población compra en la panadería A, el 25% en la B, y el 15% en ambas. Se escoge una persona al azar:

a) [0'5] ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en A y no compre en B ?

b) [0'5] Si esta persona es cliente de A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de B?

c) [0'5] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente de A ni de B?

d) [0'5] ¿Son independientes los sucesos “ser cliente de A” y “ser cliente de B”?

Parte 2 [2]

Para estimar la media de una variable aleatoria *X*, que se distribuye según una ley Normal con desviación típica 2.5, se toma una muestra aleatoria cuya media es 4.5. Para un nivel de confianza del 99%:

a) [1] Halle un intervalo de confianza para la media de la población, si el tamaño de esa muestra es 90.

b) [1] Determine el tamaño mínimo que debería tener otra muestra para obtener un intervalo de confianza, con una amplitud máxima de 1 unidad.

Modelo 1

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

Sea el sistema de ecuaciones lineales $S:\begin{cases} x-y-z = -2 \\ 2x+3y-z = 2 \\ 4x+y-3z = -2 \end{cases}$

a) [2] Clasifique y resuelva el sistema.

b) [1] Escriba la matriz de coeficientes de este sistema y, si es posible, calcule su matriz inversa.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x-2}$

a) [2] Determine su dominio, los puntos de corte con los ejes, sus asíntotas, y represéntela gráficamente.

b) [1] Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Entre las 7 bolas de una máquina de futbolín hay 2 rojas y 5 blancas; en cada partida, la máquina va sacando las bolas de una en una, de forma aleatoria, sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) [0'5] "La primera bola es roja".

b) [0'5] "Las dos primeras bolas son blancas".

c) [1] "Las dos primeras bolas son de colores distintos".

Parte 2 [2]

La resistencia a la rotura, de un tipo de hilos de pesca, es una variable aleatoria Normal, con media 4 kg y desviación típica 1'4 kg. Se toman muestras aleatorias de 25 hilos de este tipo y se obtiene la resistencia media a la rotura.

a) [0'75] ¿Cómo se distribuye la resistencia media a la rotura?

b) [1'25] ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia media a la rotura no pertenezca al intervalo de extremos 3'90 kg y 4'15 kg ?

Modelo 2

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

a) [1] Calcule $(A-I_2)\cdot B$

b) [1] Obtenga la matriz B^t y calcule, si es posible, $B^t\cdot A$

c) [1] Calcule la matriz X que verifica $A\cdot X+B=C$

EJERCICIO 2 [3]

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<1\\ -x^2+4x-2 & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}$

a) [1] Analice su continuidad y su derivabilidad.

b) [1] Estudie la monotonía, determine sus extremos y analice su curvatura.

c) [1] Represente la gráfica de la función.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Sean A y B dos sucesos tales que

$$p(A)=0'4 \quad , \quad p(B^c)=0'7 \quad \text{y} \quad p(A\cup B)=0'6$$

a) [1] ¿ Son independientes A y B ?

b) [1] Calcule $p(A/B^c)$

Parte 2 [2]

Una empresa de teléfonos móviles ha hecho un estudio sobre el tiempo que tardan sus baterías en descargarse, llegando a la conclusión de que la duración, en días, sigue una ley Normal de media 3'8 y desviación típica 1.

Se toma una muestra de 16 móviles de esta empresa. Halle la probabilidad de que:

a) [1] La duración media de las baterías de la muestra esté comprendida entre 4'1 y 4'3 días.

b) [1] La duración media de las baterías de la muestra sea inferior a 3'35 días.

Modelo 2

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

Calcule los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x,y)=3x+5y$, en el recinto del plano determinado por las inecuaciones:

$$x\geq 0 \ , \ y\geq 0 \ , \ 3x-2y\geq 10 \ , \ 2x+3y\leq 24 \ , \ x-5y\geq -1$$

EJERCICIO 2 [3]

Sea la función $f(x)=-x^3+6x^2-9x$

a) [1] Estudie la monotonía y calcule los extremos relativos de *f*.

b) [1] Estudie la curvatura y calcule el punto de inflexión de *f*.

c) [1] Represente gráficamente la función.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Se realiza una encuesta sobre las preferencias de vivir en la ciudad o en urbanizaciones cercanas. Del total de la población encuestada el 60% son mujeres, de las cuales prefieren vivir en la ciudad un 73%. Se sabe que la probabilidad de que una persona, sea hombre o mujer, desee vivir en la ciudad es 0'62.

a) [1] Calcule la probabilidad de que elegido un hombre al azar, prefiera vivir en la ciudad.

b) [1] Supuesto que una persona, elegida al azar, desee vivir en la ciudad, calcule la probabilidad de que sea mujer.

Parte 2 [2]

Se sabe que la velocidad de los coches que circulan por una carretera es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 12 km/hora.

a) [1] Se toma una muestra aleatoria de 400 coches que da una velocidad media de 87 km/hora. Obtenga un intervalo con un 95% de confianza, para la velocidad media del total de coches que circulan por esa carretera.

b) [1] Calcule el mínimo tamaño de la muestra que se ha de tomar para estimar la velocidad media del total de coches que circulan por esa carretera, con un error inferior a 1 km/hora para un nivel de confianza del 99%.

Modelo 3

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

Una pastelería elabora dos tipos de trufas, dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 g de cacao, 20 g de nata y 30 g de azúcar y se vende a 1 euro la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 g de cacao, 20 g de nata y 15 g de azúcar y se vende a 1'3 euros la unidad.

En un día, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10'5 kg de azúcar. Sabiendo que vende todo lo que elabora, calcule cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día, para maximizar los ingresos, y determine dichos ingresos.

EJERCICIO 2 [3]

Calcule las derivadas de las siguientes funciones (no es necesario simplificar el resultado) :

a) [0'75] $f(x)=\frac{3x-1}{x}-(5x-x^2)^2$

b) [0'75] $g(x)=(x^2-1)\cdot Lx$

c) [0'75] $h(x)=2^{5x}$

d) [0'75] $i(x)=(x^3-6x)\cdot(x^2+1)^3$

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Consideramos el experimento aleatorio de lanzar dos dados distintos y anotar el producto de sus puntuaciones.

a) [1] ¿Cuál es la probabilidad de que dicho producto sea igual a 6?

b) [1] Si sabemos que el producto ha sido 4, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido los dos dados con la misma puntuación?

Parte 2 [2]

Dada la población de elementos $\{3, 4, 5, 8\}$, se pretende seleccionar una muestra de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio con reemplazamiento.

a) [0'75] Escriba todas las muestras posibles.

b) [0'75] Calcule la varianza de la población.

c) [0'75] Calcule la varianza de las medias muestrales.

Modelo 3

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

De una matriz A se sabe que su segunda fila es $\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$ y su segunda columna es $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Halle los restantes elementos de A sabiendo que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2 [3]

De una función f se sabe que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$

a) [1'5] Estudie la monotonía y la curvatura de f.

b) [1'5] Sabiendo que la gráfica de f pasa por $(0, 1)$, calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

En una ciudad, el 40% de sus habitantes lee el diario *A*, el 25% lee el diario *B* y el 50% lee al menos uno de los dos diarios.

a) [0'5] Los sucesos “leer el diario *A*” y “leer el diario *B*” ¿son independientes?

b) [0'5] Entre los que leen el diario *A*, ¿qué porcentaje lee también el diario *B*?

c) [0'5] Entre los que leen, al menos, un diario ¿qué porcentaje lee los dos?

d) [0'5] Entre los que no leen el diario *A*, ¿qué porcentaje lee el diario *B*?

Parte 2 [2]

El número de horas semanales que los estudiantes de Bachillerato de una ciudad dedican al deporte se distribuye según una ley Normal de media 8 y varianza 7'29.

a) [0'5] Para muestras de tamaño 36, indique cuál es la distribución de las medias muestrales.

b) [1'5] ¿Cuál es la probabilidad de que la media de una muestra de tamaño 36 esté comprendida entre 7'82 y 8'36 horas?

Modelo 4

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

a) [2] Sabemos que el precio del kilo de tomates es la mitad que el del kilo de carne. Además, el precio del kilo de gambas es el doble que el de carne.

Si pagamos 18 euros por 3 kilos de tomates, 1 kilo de carne y 250 gramos de gambas, ¿cuánto pagaríamos por 2 kilos de carne, 1 kilo de tomates y 500 gramos de gambas?

b) [1] Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle A^{2004} .

EJERCICIO 2 [3]

a) [1'25] Calcule la ecuación de la recta tangente a $y=\frac{1}{x-1}$ en el punto de abscisa $x=2$

b) [1'25] ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x)=2x^2+3x+1$ la recta tangente es paralela a $y=3x-5$?

c) [0'5] Sea $g(x)=2x^2-8x+a$. Halle a para que el valor mínimo de g sea 3.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola. Calcule:

a) [1] La probabilidad de que la segunda bola sea verde.

b) [1] La probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

Parte 2 [2]

La superficie de las parcelas de una determinada provincia se distribuye según una ley Normal con media 2.9 Ha y desviación típica 0.6 Ha.

a) [0'5] Indique la distribución de las medias muestrales para muestras de tamaño 169.

b) [1'5] ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de tamaño 169 tenga una superficie media comprendida entre 2.8 y 3 Ha?

Modelo 4

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

a) [1] Los vértices de un polígono convexo son

$$(1,1) \ , \ (3,\frac{1}{2}) \ , \ (\frac{8}{3},\frac{5}{2}) \ , \ (\frac{7}{3},3) \ \text{y} \ (0,\frac{5}{3})$$

Calcule el máximo de la función objetivo $F(x,y)=3x-2y+4$ en la región delimitada por dicho polígono.

b) [2] Dibuje el recinto del plano definido por las inecuaciones:

$$x+2y\geq 6 \ , \ x-y\leq 1 \ , \ y\leq 5 \ , \ x\geq 0 \ , \ y\geq 0$$

y determine sus vértices.

EJERCICIO 2 [3]

a) [2] Estudie la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+7 & \text{si} \quad x\leq 3 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

b) [1] Calcule la derivada de $g(x)=(x+1)\cdot e^{2x+1}$

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

El despertador de un trabajador suena en el 80% de los casos. Si suena, la probabilidad de que llegue puntual al trabajo es 0.9; si no suena, llega tarde el 50% de las veces.

a) [1] ¿Cuál es la probabilidad de que llegue puntual?

b) [1] Si llega tarde, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sonado el despertador?

Parte 2 [2]

a) [1] De una población Normal de media desconocida y desviación típica 6, se extrae la siguiente muestra

82, 78, 90, 89, 92, 85, 79, 63, 71

Determine un intervalo de confianza, al 98%, para la media de la población.

b) [1] Determine el tamaño que debe tener otra muestra de esta población para que un intervalo de confianza para la media, al 98%, tenga una amplitud igual a 4'66.

Modelo 5

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

Sea el sistema de inecuaciones $\begin{cases} x+y & \leq & 6 \\ 3x-2y & \leq & 13 \\ x+3y & \geq & -3 \\ x & \geq & 0 \end{cases}$

a) [2] Dibuje el recinto cuyos puntos son las soluciones del sistema y obtenga sus vértices.

b) [1] Halle los puntos del recinto en los que la función $F(x,y)=x-2y$ toma los valores máximo y mínimo, y determine éstos.

EJERCICIO 2 [3]

La temperatura *T*, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo *t*, en horas, por la expresión:

$$T(t)=40t-10t^2 \quad ,, \quad 0\leq t\leq 4$$

a) [1'5] Represente gráficamente la función *T* y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.

b) [1'5] ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

María y Laura idean el siguiente juego: cada una lanza un dado, si en los dos dados sale el mismo número, gana Laura; si la suma de ambos es 7, gana María; y en cualquier otro caso hay empate.

a) [1] Calcule la probabilidad de que gane Laura.

b) [1] Calcule la probabilidad de que gane María.

Parte 2 [2]

Un fabricante de pilas alcalinas sabe que el tiempo de duración, en horas, de las pilas que fabrica sigue una distribución Normal de media desconocida y varianza 3600. Con una muestra de su producción, elegida al azar, y un nivel de confianza del 95% ha obtenido para la media el intervalo de confianza (372'6 , 392'2).

a) [1] Calcule el valor que obtuvo para la media de la muestra y el tamaño muestral utilizado.

b) [1] ¿Cuál sería el error de su estimación, si hubiese utilizado una muestra de tamaño 225 y un nivel de confianza del 86'9% ?

Modelo 5

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) [2] Calcule la matriz *P* que verifica $B\cdot P-A=C^t$

b) [0'5] Determine la dimensión de la matriz *M* para que pueda efectuarse el producto $A\cdot M\cdot C$.

c) [0'5] Determine la dimensión de la matriz *N* para que $C^t\cdot N$ sea una matriz cuadrada.

EJERCICIO 2 [3]

a) [1'5] Halle los valores de a y b para que la función $f(x)=x^3+a\,x^2+b$ tenga un extremo relativo en el punto $(-2,3)$

b) [1'5] Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3-4\,x+2$ en su punto de inflexión.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Dados dos sucesos aleatorios *A* y *B*, se sabe que

$$p(B^c)=\frac{3}{4} \quad \text{y} \quad p(A)=p(A/B)=\frac{1}{3}$$

a) [0'75] Razone si los sucesos *A* y *B* son independientes.

b) [1'25] Calcule $p(A\cup B)$

Parte 2 [2]

El peso de los paquetes enviados por una determinada empresa de transportes se distribuye según una ley Normal, con una desviación típica de 0'9 kg. En un estudio realizado con una muestra aleatoria de 9 paquetes, se obtuvieron los siguientes pesos en kilos:

9'5 , 10 , 8'5 , 10'5 , 12'5 , 10'5 , 12'5 , 13, 12

a) [1] Halle un intervalo de confianza, al 99%, para el peso medio de los paquetes enviados por esa empresa.

b) [1] Calcule el tamaño mínimo que debería tener una muestra, en el caso de admitir un error máximo de 0'3 kg, con un nivel de confianza del 90%.

Modelo 6

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

a) [1] Dibuje la región del plano definida por las siguientes inecuaciones:

$$2x-3y\geq-13 \quad , \quad 2x+3y\geq 17 \quad , \quad x+y\leq 11 \quad , \quad y\geq 0$$

b) [1] Determine los vértices de este recinto.

c) [1] Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=5x+6y$ en la región anterior e indique en qué puntos se alcanzan.

EJERCICIO 2 [3]

a) [1'5] Dada la función $f(x)=ax^2+bx$, calcule a y b para que la función tenga un extremo relativo en el punto (1 , 4).

b) [1'5] Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\frac{2}{x}+Lx$ en el punto de abscisa $x=1$.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

En una universidad española el 30% de los estudiantes son extranjeros y, de éstos, el 15% están becados. De los estudiantes españoles, sólo el 8% tienen beca. Si se elige, al azar, un alumno de esa universidad:

c) [1] ¿Cuál es la probabilidad de que sea español y no tenga beca?

d) [1] Calcule la probabilidad de que sea extranjero, sabiendo que tiene beca.

Parte 2 [2]

La duración de un cierto tipo de bombillas eléctricas se distribuye según una ley Normal con desviación típica 1500 horas.

a) [1] Si en una muestra de tamaño 100, tomada al azar, se ha observado que la vida media es de 9900 horas, determine un intervalo, con el 95% de confianza, para la vida media de esta clase de bombillas.

b) [1] Con un nivel de confianza del 99% se ha construido un intervalo para la media con un error máximo de 772'5 horas, ¿qué tamaño de la muestra se ha tomado en este caso?

Modelo 6

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

a) [1'5] Plantee, sin resolver, un sistema de ecuaciones asociado al siguiente problema:

"Un monedero contiene 1 euro en monedas de 2, 5 y 10 céntimos; en total hay 22 monedas. Sabiendo que el número de monedas de 5 y 10 céntimos juntas excede en 2 unidades al número de monedas de 2 céntimos, obtenga el número de monedas de cada tipo que hay en el monedero".

b) [1'5] Resuelva el sistema formado por las ecuaciones $\begin{cases} x+y+z = 6 \\ 2x-y+2z = 3 \\ 3x+2y-3z = 3 \end{cases}$

EJERCICIO 2 [3]

Sea la función $f(x)=\begin{cases} 9-x^2 & \text{si} \quad x\leq 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$.

a) [1] Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) [1] Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.

c) [1] Represéntela gráficamente.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

En un centro de Bachillerato, los alumnos de 1º son el 60% del total, y los de 2º el 40% restante. De todos ellos, el 46% posee móvil y el 18% son de 1º y tienen móvil.

a) [1] Calcule la probabilidad de que un alumno de 1º, elegido al azar, posea móvil.

b) [1] Elegido un alumno, al azar, resulta que tiene móvil, ¿cuál es la probabilidad de que sea de 2º ?

Parte 2 [2]

Una variable aleatoria puede tomar los valores 20, 24 y 30 . Mediante muestreo aleatorio simple se forman todas las muestras posibles de tamaño 2.

a) [0'75]Escriba todas las muestras posibles.

b) [1'25] Calcule la media y varianza de las medias muestrales.