Instrucciones

1. Elige entre realizar bien los tres ejercicios de la Opción A, bien los tres ejercicios de la Opción B, sin mezclar los de una opción con los de otra.
2. El ejercicio de Álgebra vale 3 puntos, el de Análisis 3 puntos y el Probabilidad y Estadística 4 puntos.
3. Contesta las preguntas razonando tus conclusiones; la mera respuesta numérica no vale para obtener la puntuación máxima en cada apartado. Justifique siempre las respuestas.
4. Escribe de forma ordenada y con letra clara.
5. Se permite el uso de una calculadora no programable y no gráfica. Si obtiene resultados directamente con ella, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda.

Tiempo

90 minutos

Criterios de Evaluación

Los criterios esenciales de valoración serán el planteamiento razonado y la ejecución técnica del mismo. La mera descripción del planteamiento sin que se lleve a cabo de forma efectiva no puede ser suficiente para obtener una valoración positiva del mismo.

En los ejercicios en los que se pida una deducción razonada, la mera aplicación de un fórmula no será suficiente.

No se prohibirá el uso de calculadoras, aunque durante el examen no se permitirá el préstamo de ellas entre estudiante. En cualquier caso, los procesos que conducen al resultado deben estar razonados.

Los errores cometidos en un apartado no se tendrán en cuenta en la calificación de apartados posteriores que sean afectados.

Los errores no conceptuales en las operaciones se penalizarán con un máximo del 10% de la nota total del ejercicio.

La presentación clara y ordenada se valorará positivamente.

Modelo 1

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

a) [1'5] Clasifique y resuelva el sistema $\begin{cases} 2x+3y-z & = & 4 \\ x+2y+z & = & 5 \end{cases}$.

b) [1'5] Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcule $\left(A^t \cdot B - 2I_2\right)^{-1}$.

EJERCICIO 2 [3]

El número medio de clientes que visitan un hipermercado entre las 11 y las 20 horas está dado por la fórmula $f(x)=x^3-42x^2+576x-2296$, en función de la hora *x*, siendo $11 \le x \le 20$.

a) [1] Halle los extremos relativos de esta función.

b) [1] Represente esta función y determine las horas en las que crece el número medio de clientes.

c) [1] Halle los valores máximos y mínimos del número medio de clientes que visitan el hipermercado entre las 11 y las 20 horas.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

El 55% de la población española son mujeres, de las cuales un 23% usa el coche para ir al trabajo. Se sabe que la probabilidad de que una persona, sea hombre o mujer, vaya al trabajo en coche es 0'52.

a) [1] Elegido un hombre, al azar, ¿cuál es la probabilidad de que utilice el coche para desplazarse al trabajo?

b) [1] Si se elige una persona, al azar, y resulta que no usa el coche para ir al trabajo, calcule la probabilidad de que sea una mujer.

Parte 2 [2]

El peso de los adultos de una determinada especie de peces sigue una ley Normal de desviación típica 112 g.

¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra de peces que debería tomarse para obtener, con una confianza del 95%, la media de la población con un error menor de 20 g?

Modelo 1

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

a) [2] Represente gráficamente la región del plano delimitada por las siguientes inecuaciones: $x+2y\geq 80$, $3x+2y\geq 160$, $x+y\leq 70$, y determine sus vértices.

b) [1] Calcule el máximo y el mínimo de la función $F(x,y)=9x+8y-5$ en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.

EJERCICIO 2 [3]

a) [1] Sea la función $f(x)=x^2+ax+b$. Calcule a y b para que su gráfica pase por el punto $(0,-5)$ y que en este punto la recta tangente sea paralela a la recta $y=-4x$.

b) [1] Estudie el crecimiento y decrecimiento de una función g cuya derivada tiene por gráfica la recta que pasa por los puntos $(2,0)$ y $(3,1)$.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

En una biblioteca sólo hay libros de física y de matemáticas, que están escritos en inglés o en español. Se sabe que el 70% de los libros son de física, el 80% de los libros están escritos en español y el 10% son libros de matemáticas escritos en inglés.

a) [1] Calcule qué tanto por ciento de los libros son de física y escritos en español.

b) [1] Si cogemos un libro de física, ¿cuál es la probabilidad de que esté escrito en español?

Parte 2 [2]

Se está estudiando el consumo de gasolina de una determinada marca de coches. Para ello se escogen 50 automóviles al azar y se obtiene que el consumo medio es de 6'5 litros. Con independencia de esta muestra, se sabe que la desviación típica del consumo de ese modelo de coches es 1'5 litros.

a) [1] Halle un intervalo de confianza, al 97%, para el consumo medio de gasolina de los coches de esa marca.

b) [1] El fabricante afirma que el consumo medio de gasolina de sus vehículos está comprendido entre 6'2 y 6'8 litros. ¿Con qué nivel de confianza puede hacer dicha

Modelo 2

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

Sea el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} -5x+3y\leq 2 \\ -x+2y\geq 6 \\ 2x+3y\leq 37 \end{cases}$.

c) [2'25] Represente el conjunto solución y determine sus vértices.

d) [0'75] Halle el punto del recinto anterior en el cual la función $F(x,y)=-2x+5y$ alcanza su valor máximo.

EJERCICIO 2 [3]

a) [2] Sea la función $f(x)=\begin{cases} -(x-1)^2+b & \text{si} \quad x\geq 2 \\ a(x-3)^2+3 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$.

Halle a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 2$.

b) [1] Halle la función derivada de $g(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Blanca y Alfredo escriben, al azar, una vocal cada uno en papeles distintos.

a) [1] Determine el espacio muestral asociado al experimento.

b) [1] Calcule la probabilidad de que no escriban la misma vocal.

Parte 2 [2]

La longitud de la ballena azul se distribuye según una ley Normal con desviación típica 7'5 m. En un estudio estadístico realizado a 25 ejemplares se ha obtenido el intervalo de confianza $(21'06, 26'94)$ para la longitud media.

a) [0'5] Calcule la longitud media de los 25 ejemplares de la muestra.

b) [1'5] Calcule el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

Modelo 2

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

Sean las matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

a) [0'75] Calcule la matriz $A=M\cdot M^t-5M$

b) [2'25] Calcule la matriz $B=M-I$ y resuelva la ecuación $N+X\cdot M=M\cdot B$, donde X es una matriz 2×2.

EJERCICIO 2 [3]

Sea la función $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 0<x<2\\ \dfrac{x}{4} & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

a) [1] Represéntela gráficamente.

b) [1] Estudie su continuidad y derivabilidad.

c) [1] Calcule sus extremos y asíntotas horizontales y verticales.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

El 70% de los alumnos de un Instituto son de Bachillerato y el resto de E.S.O. De los alumnos de Bachillerato, el 60% estudia más de 3 horas al día, y sólo el 30 % de los de E.S.O. estudia más de 3 horas al día.

a) [1] Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho Instituto, elegido al azar, estudie más de 3 horas al día.

b) [1] Sabiendo que un alumno de este Instituto, elegido al azar, estudia más de 3 horas al día, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Bachillerato?

Parte 2 [2]

De una población Normal, con media desconocida y varianza 81, se extrae una muestra aleatoria que resulta tener una media muestral de 112.

a) [1] Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la media poblacional, si el tamaño de la muestra es 49.

b) [1] ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra si se desea que el error cometido, al estimar la media poblacional, sea inferior a 2, para un nivel de confianza del 90%?

Modelo 3

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & x\\ 0 & x+2\end{pmatrix}$.

a) [1'5] Halle los valores de x para los que se verifica $A^2=2A$.

b) [1'5] Para $x=-1$, halle A^{-1} . Compruebe el resultado calculando $A\cdot A^{-1}$.

EJERCICIO 2 [3]

Sea la función $f(x)=\dfrac{3-x}{x-1}$

a) [2] Determine su dominio y asíntotas. Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) [1] Determine sus máximos y mínimos relativos, si los hubiere. Estudie su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.

c) [1] Represéntela gráficamente.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Una máquina *A* fabrica 100 piezas al día, de las cuales un 6% son defectuosas. Otra máquina *B* fabrica 50 piezas al día, con un porcentaje de defectuosas del 2%.

Mezclamos las piezas fabricadas por ambas máquinas en un día y extraemos una al azar.

a) [1] ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza extraída sea defectuosa?

b) [1] Sabiendo que la pieza extraída es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la haya fabricado la máquina *B*?

Parte 2 [2]

Se sabe que la antigüedad de los coches fabricados por una empresa es una variable aleatoria Normal, con desviación típica 2'9 años.

a) [1] Un estudio realizado sobre una muestra aleatoria de 169 coches, de esa empresa, revela que la antigüedad media de la muestra es 8'41 años. Obtenga un intervalo de confianza, al 90%, para la antigüedad media de la población.

b) [1] Determine el número mínimo de coches que debe componer una muestra, para obtener, con un nivel de confianza del 95%, un error de estimación menor que 0'35 años.

Modelo 3

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

Una empresa gana 150 euros por cada Tm de escayola producida y 100 euros por cada Tm de yeso.

La producción diaria debe ser como mínimo de 30 Tm de escayola y 30 Tm de yeso.

La cantidad de yeso no puede superar en más de 60 Tm a la de escayola.

El triple de la cantidad de escayola, más la cantidad de yeso, no puede superar 420 Tm.

Calcule la cantidad diaria que debe producirse de cada material, para obtener la máxima ganancia y determine dicha ganancia.

EJERCICIO 2 [3]

Sea la función
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1<x\leq 2 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) [2] Estudie la continuidad y derivabilidad de f en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) [1] Represéntela gráficamente.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Sean A y B dos sucesos aleatorios independientes. Se sabe que $p(A)=0'3,\ p(B)=0'4$.

Calcule las siguientes probabilidades:

a) [1] $P(A\cup B)$.

b) [1] $p\left(A/B^c\right)$.

Parte 2 [2]

En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes para estimar la temperatura media de sus enfermos. La media de la muestra ha sido 37'1ºC y se sabe que la desviación típica de toda la población es 1'04ºC.

a) (1 punto)

b) (1 punto)

a) [1] Obtenga un intervalo de confianza, al 90%, para la media poblacional.

b) [1] ¿Con qué nivel de confianza podemos afirmar que la media de la población está comprendida entre 36'8ºC y 37'4ºC?

Modelo 4

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

Una empresa fabrica sofás de dos tipos, *A* y *B*, por los que obtiene un beneficio, por unidad, de 1500 y 2000 euros, respectivamente.

Al menos se deben fabricar 6 sofás del tipo *A* y 10 del tipo *B*, por semana, y además, el número de los del tipo *A* no debe superar en más de 6 unidades al número de los del *B*.

¿Cuántas unidades de cada tipo se deben fabricar semanalmente para obtener beneficio máximo, si no se pueden fabricar más de 30 sofás semanalmente?

EJERCICIO 2 [3]

Los beneficios esperados de una inmobiliaria en los próximos 5 años vienen dados por la función

$$B(t)=t^3-9t^2+24t \quad , \quad 0\leq t\leq 5$$

donde t indica el tiempo en años.

a) [2] Represente la evolución del beneficio esperado en función del tiempo.

b) [1] En ese periodo, ¿cuándo será máximo el beneficio esperado?

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

En un curso, el porcentaje de aprobados en Lengua es del 65% y en Filosofía del 50%.

Se sabe que la probabilidad $p(F/L)=0.7$, siendo *F* y *L* los sucesos "aprobar Filosofía" y "aprobar Lengua", respectivamente.

a) [1] Calcule $p(L/F)$.

b) [1] Halle la probabilidad de no aprobar ninguna de las dos asignaturas.

Parte 2 [2]

a) [1] Se sabe que la desviación típica de los salarios de una población es 205 euros. Determine un intervalo, con el 90 % de confianza, para el salario medio de la población, sabiendo que el salario medio correspondiente a una muestra de 2500 personas ha sido de 1215 euros.

b) [1] Elegida otra muestra grande, cuya media ha sido 1210 euros, se ha obtenido, con un 95 % de confianza, el intervalo (1199'953 , 1220'045). ¿Cuál es el tamaño de esta muestra?

Modelo 4

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

a) [1'5] Plantee, sin resolver, un sistema de ecuaciones que dé solución al siguiente problema:

"Un inversor compró acciones de las empresas *A*, *B* y *C* por un valor total de 20000 euros, invirtiendo en *C* el doble que en *A*. Al cabo de un año la empresa *A* le pagó el 6% de beneficio, la *B* el 8% y la *C* el 10%. Si el beneficio total fue de 1720 euros, ¿qué dinero invirtió en cada empresa ?

b) [1'5] Resuelva la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2+x & x \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

EJERCICIO 2 [3]

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & \text{si} \quad x \leq 4 \\ x^2 - 9x + 21 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

a) [1'5] Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) [1'5] Represente gráficamente la función y determine máximos y mínimos relativos, si los hubiere, así como el crecimiento y decrecimiento.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar 3 veces una moneda y observar el resultado.

a) [0'8] Escriba el espacio muestral asociado y las probabilidades de los sucesos elementales.

b) [1'2] Sean los sucesos *A*: "obtener al menos una cara", *B*: "obtener cara en solo uno de los tres lanzamientos". Calcule $p(A)$ y $p(B)$. ¿Son independientes A y B ?

Parte 2 [2]

El perímetro craneal de una población de varones adultos sigue una ley Normal con desviación típica 4 cm.

a) [1'5] Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para el perímetro craneal medio, sabiendo que una muestra aleatoria de 100 individuos de esa población tiene una media de 57 cm.

b) [0'5] Con el mismo nivel de confianza, si se aumenta el tamaño de la muestra, razone si aumenta, disminuye o no varía la amplitud del intervalo.

Modelo 5

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

a) [2] Represente gráficamente la región del plano delimitada por las siguientes inecuaciones

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\geq 1 \quad , \quad y\leq 4 \quad , \quad x\leq 2$$

b) [1] Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=-x+2y-3$ en la región anterior e indique para qué valores se alcanzan.

EJERCICIO 2 [3]

Sea la función
$$f(x)=\begin{cases} -4x-3 & \text{si} \quad x\leq -1 \\ 2x^2-1 & \text{si} \quad -1<x<1 \\ \dfrac{k+2}{x} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

a) [2] Calcule el valor que debe tomar el parámetro *k* para que la función sea continua en $\mathbb{R}$ y estudie su derivabilidad para el valor de *k* obtenido.

b) [1] Dibuje la gráfica de la función para *k* = –1.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

En una residencia hay 212 ancianos de los que 44 tienen afecciones pulmonares. Del total de ancianos, 78 son fumadores, y solo hay 8 que tienen enfermedad de pulmón y no fuman.

a) [1] ¿Cuál es la probabilidad de que un anciano de esa residencia, elegido al azar, no fume y tampoco tenga afección pulmonar ?

b) [1] ¿Qué porcentaje de enfermos de pulmón son fumadores ?

Parte 2 [2]

Se sabe que la desviación típica del peso de las naranjas que se producen en una determinada huerta es de 20 gramos. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 naranjas de esa huerta, siendo su peso medio 200 gramos.

a) [0'75] Indique la distribución aproximada que siguen las medias de las muestras de ese tamaño y justifique su respuesta.

b) [1'25] Calcule un intervalo de confianza, a un nivel del 95%, para el peso medio de las naranjas de esa huerta.

Modelo 5

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & m \\ 1-m & m+1 \end{pmatrix}$.

a) [1] Calcule los valores de m para que dicha matriz tenga inversa.

b) [2] Haciendo $m = 0$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A = I_2$.

EJERCICIO 2 [3]

Sea la función $f(x)=2x^3+ax^2-12x+b$

a) [1'5] Halle a y b para que la función se anule en $x = 1$ y tenga un punto de inflexión en $x=-\frac{1}{2}$

b) [1'5] Para $a = -3$ y $b = 2$, calcule sus máximos y mínimos relativos.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

Disponemos de dos urnas *A* y *B* conteniendo bolas de colores. La urna *A* tiene 4 bolas blancas y 3 rojas, y la *B* tiene 5 blancas, 2 rojas y 1 negra. Lanzamos un dado, si sale 1, 2, 3 ó 4 extraemos una bola de A y si sale 5 ó 6 la extraemos de *B*.

a) [0'5] Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

b) [0'5] Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

c) [1] Sabiendo que la bola extraída ha sido blanca, calcule la probabilidad de que en el dado haya salido 5 ó 6.

Parte 2 [2]

El tiempo que la población infantil dedica semanalmente a ver la televisión, sigue una ley Normal con desviación típica 3 horas.

Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 100 niños y, con un nivel de confianza del 97%, se ha construido un intervalo para la media poblacional.

a) [1'25] Calcule el error máximo cometido y el tiempo medio de la muestra elegida, sabiendo que el límite inferior del intervalo de confianza obtenido es 23'5 horas.

b) [0'75] Supuesto el mismo nivel de confianza, ¿cuál debería haber sido el tamaño mínimo de la muestra para cometer un error en la estimación inferior a media hora?

Modelo 6

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 [3]

Una piscifactoría vende gambas y langostinos a 10 y 15 euros el kg, respectivamente.

La producción máxima mensual es de una tonelada de cada producto y la producción mínima mensual es de 100 kg de cada uno.

Si la producción total es, a lo sumo, de 1700 kg al mes, ¿cuál es la producción que maximiza los ingresos mensuales? Calcule estos ingresos máximos.

EJERCICIO 2 [3]

Se conoce que el rendimiento de un jugador de fútbol durante los primeros 45 minutos de un partido viene dado por la función $f:[0,45]\rightarrow\mathbb{R}$ cuya expresión analítica es $f(t)=7.2t-0.16t^2$, donde t es el tiempo, expresado en minutos.

a) [1'5] Represente gráficamente esta función.

b) [1'5] ¿Cuál es el máximo rendimiento del jugador? ¿En qué momento lo consigue? ¿En qué instantes tiene un rendimiento igual a 32?

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

De dos sucesos A y B, asociados a un mismo experimento aleatorio, se conocen las probabilidades:

$$p(B)=0'7 \ , \ p(A/B)=0'8 \ \text{ y } \ p(A\cap B^c)=0'24 \ .$$

a) [0'5] Calcule $p(A\cap B)$

b) [1] Halle $p(A)$

c) [0'5] Determine si A y B son independientes.

Parte 2 [2]

Una variable aleatoria sigue una distribución Normal con desviación típica 15.

a) [1] Construya un intervalo de confianza para la media de la población, con un nivel de confianza del 99'5%, sabiendo que una muestra de 20 individuos tiene una media de 52.

b) [1] ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de una muestra de esta población para que un intervalo de confianza, con nivel del 90%, para la media de la población tenga una amplitud inferior a 3 unidades?

Modelo 6

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 [3]

a) [1'5] Clasifique y resuelva el sistema formado por las ecuaciones siguientes:

$$x-2y+z=0 \quad , \quad 2x+y-z=5 \quad , \quad 4x+7y-5z=15$$

b) [1'5] Determine la matriz X , de orden 2, que verifica la igualdad

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2 [3]

Sea la función $\qquad f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

a) [1'5] Indique el dominio de definición de *f*, sus puntos de corte con los ejes, sus máximos y mínimos, si existen, y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) [1'5] Obtenga las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de *f*, si las tiene, y represente la gráfica de la función.

EJERCICIO 3 [4]

Parte 1 [2]

En un hospital se han producido 200 nacimientos en un mes. De ellos, 105 son varones y, de éstos, 21 tienen los ojos azules. Asimismo se ha observado que 38 de las niñas nacidas en ese mes tienen los ojos azules.

Se elige, al azar, un recién nacido entre los 200 citados.

a) [0'5] Calcule la probabilidad de que tenga los ojos azules.

b) [1'5] Si el recién nacido que se elige tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que sea un varón?

Parte 2 [2]

Sea una población cuyos elementos son 1, 2, 3.

Mediante muestreo aleatorio simple se pretende seleccionar una muestra de tamaño 2.

a) [0'75] Escriba las posibles muestras.

b) [1'25] Calcule la varianza de las medias muestrales.