TEMA 4

Cálculo de Derivadas

Ejercicios para Selectividad
de
Cálculo de Derivadas

Detalladamente
resueltos

Cursos
2000 / 2001
2001/2002

Enunciados

1. [S/01] Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{\mathrm{L}\,x}{x^2}$

b) $g(x)=(1-x^3)\cos x$

c) $h(x)=4x^3-5x+\dfrac{1}{e^x}$

2. [S/01] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2 & \text{si} \quad x\le -2 \\ a & \text{si} \quad -2<x\le 2 \\ x & \text{si} \quad x>2 \end{cases} \qquad (a\in\mathbb{R})$$

a) Calcule el valor de "a" para que f sea continua en $x=-2$.

b) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f cuando $a=2$

c) Represente gráficamente la función anterior cuando $a=2$.

3. [S/01] Determine los valores que han de tomar "a" y "b" para que la función:

$$f(x)=\begin{cases} 4x+b & \text{si} \quad x\le 1 \\ ax^2+6x-7 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

sea derivable.

4. [S/02] Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} 5 & \text{si} \quad x\le 2 \\ x^2-6x+10 & \text{si} \quad 2<x\le 5 \\ 4x-15 & \text{si} \quad x>5 \end{cases}$$

a) Represéntela gráficamente.

b) Estudie su continuidad y derivabilidad.

5. [S/02] Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-3 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 2bx-4 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Determine los valores que han de tomar "a" y "b" para que sea derivable.

b) Represente su gráfica para $a=1$ y $b=2$.

6. [S/02] Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 3x-3 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ x^2-6x+11 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Represéntela gráficamente.

b) Estudie su continuidad y su derivabilidad.

c) ¿Existe algún punto donde la derivada sea nula?

7. [S/02] Calcule las funciones derivadas de las siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{e^{5x}}{x^3-1}$

b) $g(x)=4x\cdot L(3x+1)$

c) $h(x)=(x^2-1)\cdot(x^3+2x)$

d) $p(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$

Soluciones

1. Derivemos:

a) $f(x)=\dfrac{\mathrm{L}\,x}{x^2} \overset{D}{\rightarrow} f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\cdot \mathrm{L}\,x}{(x^2)^2}=\dfrac{x-2x\cdot \mathrm{L}\,x}{x^4}=\dfrac{1-2\,\mathrm{L}\,x}{x^3}$

b) $f(x)=(1-x^3)\cos x \overset{D}{\rightarrow} f'(x)=-3x^2\cdot\cos x-\operatorname{sen}x\cdot(1-x^3)=-3x^2\cdot\cos x-(1-x^3)\operatorname{sen}x$

c) $f(x)=4x^3-5x+\dfrac{1}{e^x} \overset{D}{\rightarrow} f'(x)=12x^2-5+\dfrac{0\cdot e^x-e^x\cdot 1}{(e^x)^2}=12x^2-5-\dfrac{e^x}{e^{2x}}=12x^2-5-\dfrac{1}{e^x}$

2.

a) Continuidad para $x=-2$:

VALOR: si $x=-2$ es $y=4a-2$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to-2- \quad \text{es} \quad y=ax^2-2\to 4a-2 \\ \text{si} \quad x\to-2+ \quad \text{es} \quad y=a\to a \end{cases}$

Sólo es continua cuando $4a-2=a \rightarrow a=\dfrac{2}{3}$

b) Coloquemos $a=2$:

<u>Continuidad</u>: f sólo puede ser discontinua para $x=-2$ y $x=2$:

$\boxed{x=-2}$

Por lo visto en el apartado (a) tiene una discontinuidad de salto finito.

$\boxed{x=2}$

VALOR: si $x=2$ es $y=2$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 2- \quad \text{es} \quad y=2\to 2 \\ \text{si} \quad x\to 2+ \quad \text{es} \quad y=x\to 2 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x=2$.

<u>Derivabilidad</u>: directamente

$$f'(x)=\begin{cases} 4x & \text{si} & x<-2 \\ 0 & \text{si} & -2<x<2 \\ 1 & \text{si} & x>2 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente:

$\boxed{x=-2}$

Como f es discontinua tenemos que f no puede ser derivable en este valor.

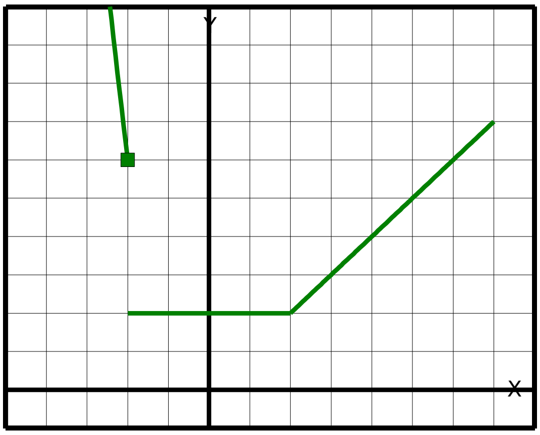
$\boxed{x=2}$

Como f es continua, puede ser derivable:

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 2- \quad \text{es} \quad y'=0\to 0 \\ \text{si} \quad x\to 2+ \quad \text{es} \quad y'=1\to 1 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que es no es derivable en este valor (es un punto *anguloso*).

c) La gráfica estará formada por un trozo de parábola + un trozo de recta horizontal + trozo de recta:



3. Directamente:

$$f(x)=\begin{cases} 4x+b & \text{si} \quad x\le 1 \\ ax^2+6x-7 & \text{si} \quad x>1 \end{cases} \quad \overset{D}{\to} \quad f'(x)=\begin{cases} 4 & \text{si} \quad x<1 \\ 2ax+6 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

<u>Continuidad</u>: f es continua en $x = 1$:

VALOR: si $x=1$ es $y=4+b$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y=4x+b\to 4+b \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y=ax^2+6x-7\to a+6-7 \end{cases}$

Concluimos que debe ser $a-1=4+b$ (*)

<u>Derivabilidad</u>: f es derivable en $x = 1$:

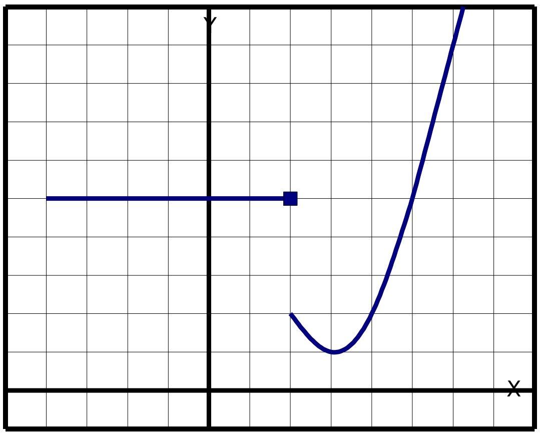
DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y'=4\to 4 \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y'=2a+6\to 2a+6 \end{cases}$

Concluimos que debe ser $2a+6=4$ (**)

Reuniendo (*) y (**): $a=-1$ y $b=-6$

4.

a) La gráfica está formada por un trozo de recta horizontal + un trozo de parábola + trozo de recta:



b)

Continuidad: apreciamos en la gráfica que f sólo es discontinua para $x = 2$, donde hay un salto finito.

Derivabilidad: directamente

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<2 \\ 2x-6 & \text{si} \quad 2<x<5 \\ 4 & \text{si} \quad x>5 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente

$\boxed{x=2}$

Como f es discontinua tenemos que f no puede ser derivable en este valor.

$\boxed{x=5}$

Como f es continua, puede ser derivable:

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 5- \quad \text{es} \quad y'=2x-6\to 4 \\ \text{si} \quad x\to 5+ \quad \text{es} \quad y'=4\to 4 \end{cases}$

Como coinciden, es derivable en este valor con $f'(5)=4$.

5.

a) Directamente

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-3 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 2bx-4 & \text{si} \quad x>1 \end{cases} \quad \overset{D}{\rightarrow} \quad f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & \text{si} \quad x<1 \\ 2b & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

<u>Continuidad</u>: f es continua en $x = 1$:

VALOR: si $x=1$ es $y=a+b-3$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y=ax^2+bx-3\to a+b-3 \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y=2bx-4\to 2b-4 \end{cases}$

Concluimos que debe ser $a+b-3=2b-4$ (*)

<u>Derivabilidad</u>: f es derivable en $x = 1$:

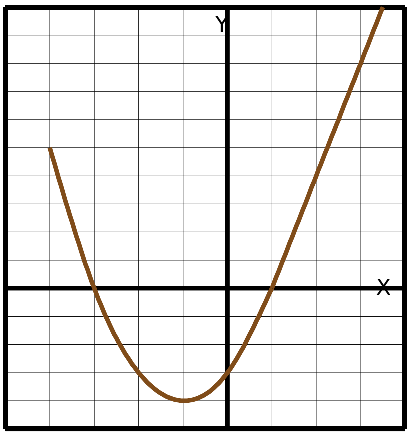
DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y'=2ax+b\to 2a+b \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y'=2b\to 2b \end{cases}$

Concluimos que debe ser $2a+b=2b$ (**)

Reuniendo (*) y (**) tenemos, resolviendo el sistema correspondiente:

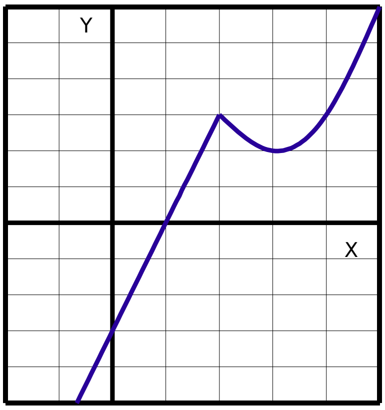
$$a=1 \text{ y } b=2$$

b) La gráfica está formada por un trozo de parábola + trozo de recta:



6.

a) La gráfica está formada por un trozo de parábola + trozo de recta:



b) Apreciamos en la gráfica que es continua en todo punto, y que es derivable para todo valor salvo para x = 2, donde apreciamos un punto anguloso. No obstante, vamos a estudiar su continuidad y su derivabilidad algebraicamente.

Continuidad: f sólo puede ser discontinua para $x = 2$:

$\boxed{x=2}$

VALOR: si $x=2$ es $y=3$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 2- \quad \text{es} \quad y=3x-3\to 3 \\ \text{si} \quad x\to 2+ \quad \text{es} \quad y=x^2-6x+11\to 3 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 2$.

Derivabilidad: directamente

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & \text{si} \quad x<2 \\ 2x-6 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Veamos ahora detenidamente

$\boxed{x=2}$

Como f es continua, puede ser derivable:

DERIVADAS LATERALES: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 2- \quad \text{es} \quad y'=3\to 3 \\ \text{si} \quad x\to 2+ \quad \text{es} \quad y'=2x-6\to -2 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que es no es derivable en este valor (es un punto *anguloso*).

c) ¿Existe algún punto donde la derivada sea nula?

Vemos claramente que la derivada es cero para $x = 3$.

Si no lo viésemos tan claro, igualaríamos a cero:

$$f'(x)=0 \quad \to \quad 2x-6=0 \quad \to \quad x=3$$

7. Derivemos:

a) $f(x)=\dfrac{e^{5x}}{x^3-1} \quad \xrightarrow{D} \quad f'(x)=\dfrac{e^{5x}\cdot 5\cdot(x^3-1)-3x^2\cdot e^{5x}}{(x^3-1)^2}=\dfrac{e^{5x}(5x^3-3x^2-5)}{(x^3-1)^2}$

b) $f(x)=4x\cdot\ln(3x+1) \quad \xrightarrow{D} \quad f'(x)=4\cdot\ln(3x+1)+\dfrac{1}{3x+1}\cdot 3\cdot 4x=4\ln(3x+1)+\dfrac{12x}{3x+1}$

c) $f(x)=x^5+x^3-2x \quad \xrightarrow{D} \quad f'(x)=5x^4+3x^2-2$

d) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2} \quad \xrightarrow{D} \quad f'(x)=\dfrac{1\cdot(x-2)-1\cdot(x+2)}{(x-2)^2}=\dfrac{-4}{(x-2)^2}$