TEMA 3

PROGRAMACIÓN LINEAL

Ejercicios para Selectividad
de
Programación Lineal

Detalladamente
resueltos

Curso
2004 / 2005

Enunciados

1.

a) Dibuje el recinto definido por las siguientes inecuaciones: $x-y\leq 1$; $x+2y\geq 7$; $x\geq 0$; $y\leq 5$

b) Determine los vértices de este recinto.

c) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y)=2x+4y-5$ y en qué puntos alcanza dichos valores?

2. Sea el siguiente sistema de inecuaciones: $2x-3y\leq 6$; $x\geq 2y-4$; $x+y\leq 8$; $x\geq 0$; $y\geq 0$.

a) Dibuje la región que definen y calcule sus vértices.

b) Halle los puntos de esa región en los que la función $F(x,y)=2x+3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y calcule dichos valores.

3.

a) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x+2y\geq 6 \;;\; x\leq 10-2y \;;\; \frac{x}{12}+\frac{y}{3}\geq 1 \;;\; x\geq 0$$

b) Calcule el máximo y el mínimo de la función $F(x,y)=4-3x-6y$ en la región anterior e indique en qué puntos se alcanzan.

4.

El estadio del Mediterráneo, construido para la celebración de los “Juegos Mediterráneos Almería 2005”, tiene una capacidad de 20000 espectadores.

Para la asistencia a estos juegos se han establecido las siguientes normas: El número de adultos no debe superar al doble del número de niños; el número de adultos menos el número de niños no será superior a 5000.

Si el precio de la entrada de niño es de 10 euros y la de adulto 15 euros ¿cuál es la composición de espectadores que proporciona mayores ingresos? ¿A cuánto ascenderán esos ingresos?

5. Sea el sistema de inecuaciones siguiente:

$$x+y\leq 600 \,,\; x\leq 500 \,,\; y\leq 3x \,,\; x\geq 0 \,,\; y\geq 0$$

a) Represente gráficamente el conjunto de soluciones del sistema y calcule sus vértices.

b) Halle el punto del recinto anterior en el que $F(x,y)=38x+27y$ alcanza su valor máximo.

6.

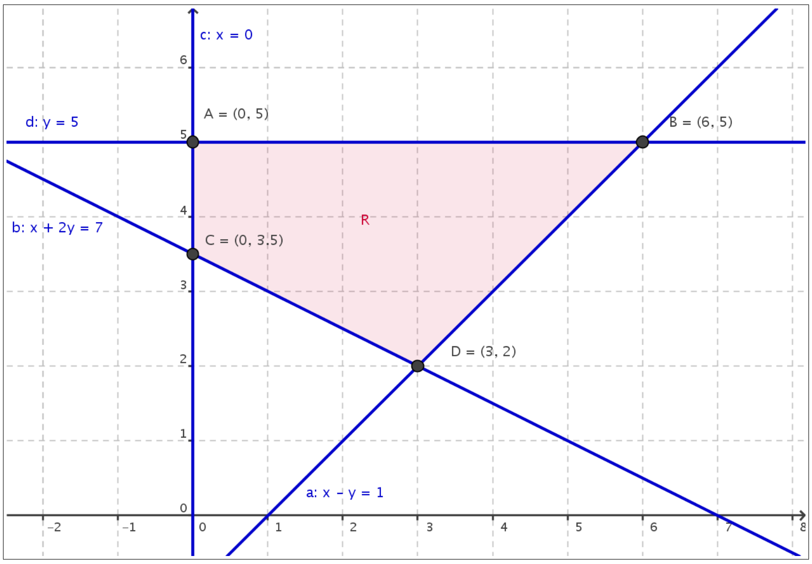
Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros.

Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio.

Soluciones

1.

a) Aquí tenemos un gráfico (realizado con GeoGebra) que nos muestra el recinto. Se trata de un cuadrilátero:



b) Apreciamos claramente en el dibujo las coordenadas de los cuatro vértices de la solución del sistema de inecuaciones:

$$A=(0,5) \quad , \quad B=(6,5) \quad , \quad C=(0,3{,}5) \quad \text{y} \quad D=(3,2)$$

c) Observemos ahora que al ser

$$F(x,y)=2x+4y-5$$

una función lineal y R un recinto convexo y acotado, los valores extremos se alcanzarán en sus vértices:

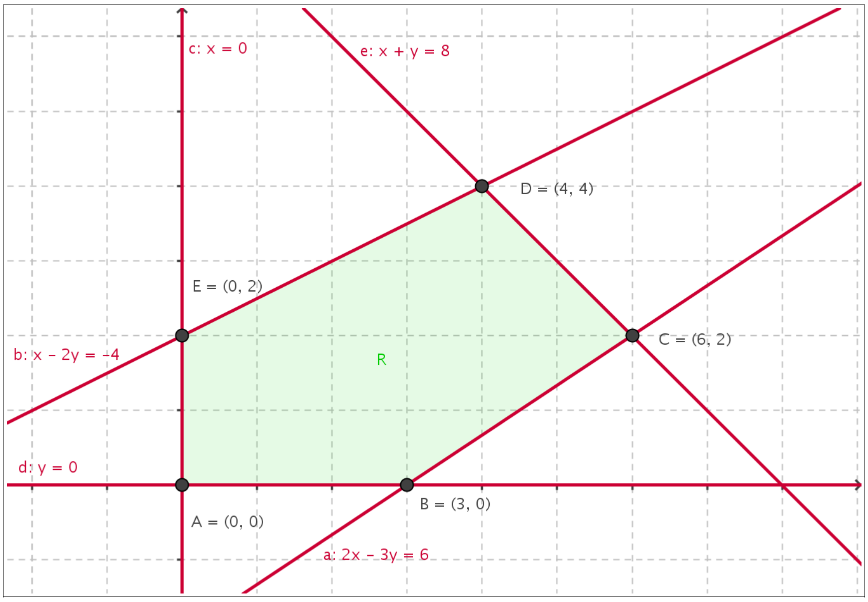
$$\begin{array}{lll} A=(0,5) & \rightarrow & f(A)=2\cdot 0+4\cdot 5-5=15 \\ B=(6,5) & \rightarrow & f(B)=2\cdot 6+4\cdot 5-5=27 \\ C=(0,3{,}5) & \rightarrow & f(C)=2\cdot 0+4\cdot 3{,}5-5=9 \\ D=(3,2) & \rightarrow & f(D)=2\cdot 3+4\cdot 2-5=9 \end{array}$$

Vemos que el valor mínimo (9) se obtiene en dos vértices: C y D. Ello nos indica que hay infinitas soluciones: en todos los puntos del segmento $\overline{CD}$ se alcanza ese valor mínimo. Por ello, ese segmento es la solución para el problema de mínimos:

$$\begin{array}{l} max\ f=27 \text{ y se alcanza en } B=(6,5) \\ min\ f=9 \text{ y se alcanza en } \overline{CD}, \text{ con } C=(0,3{,}5) \text{ y } D=(3,2) \end{array}$$

2.

a) Aquí tenemos un gráfico (realizado con GeoGebra) que nos muestra el recinto. Se trata de un pentágono:



b)

Apreciamos claramente en el dibujo las coordenadas de los cinco vértices de la solución del sistema de inecuaciones:

$$A=(0,0)\ ,\ B=(3,0)\ ,\ C=(6,2)\ ,\ D=(4,4)\ \text{y}\ E=(0,2)$$

c) Observemos ahora que al ser

$$F(x,y)=2x+3y$$

una función lineal y R un recinto convexo y acotado, los valores extremos se alcanzarán en sus vértices:

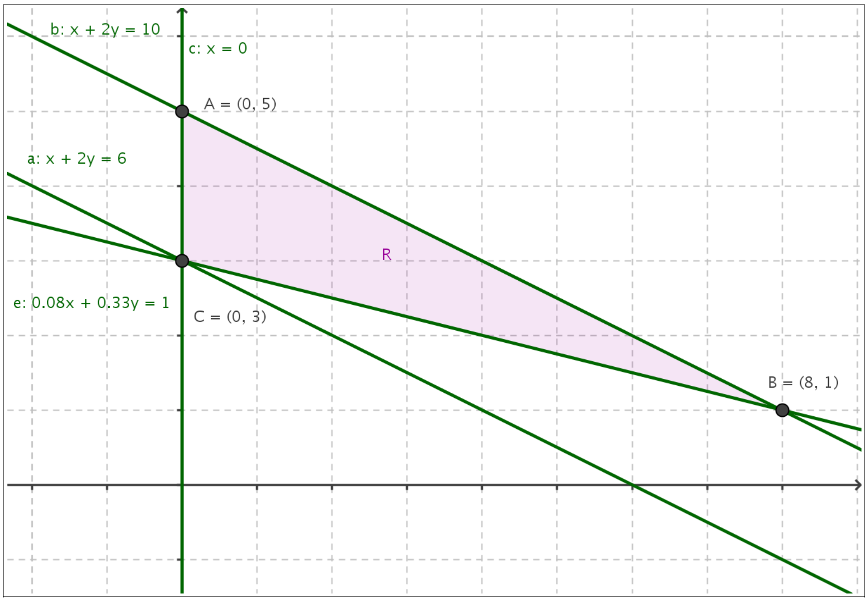
$$\begin{array}{lcl} A=(0,0) & \rightarrow & f(A)=2\cdot 0+3\cdot 0=0 \\ B=(3,0) & \rightarrow & f(B)=2\cdot 3+3\cdot 0=6 \\ C=(6,2) & \rightarrow & f(C)=2\cdot 6+3\cdot 2=18 \\ D=(4,4) & \rightarrow & f(D)=2\cdot 4+3\cdot 4=20 \\ E=(0,2) & \rightarrow & f(D)=2\cdot 0+3\cdot 2=6 \end{array}$$

Concluimos:

$$max\ f=20 \ \text{ y se alcanza en }\ D=(4,4)$$
$$min\ f=0 \ \text{ y se alcanza en }\ A=(0,0)$$

3.

a) Aquí tenemos un gráfico (realizado con GeoGebra) que nos muestra el recinto. Se trata de un triángulo:



Apreciamos claramente en el dibujo las coordenadas de los tres vértices de la solución del sistema de inecuaciones:

$$A=(0,5) \quad , \quad B=(8,1) \quad \text{y} \quad C=(0,3)$$

b) Observemos ahora que al ser

$$F(x,y)=4-3x-6y$$

una función lineal *y* R un recinto convexo y acotado, los valores extremos se alcanzarán en sus vértices:

$$\begin{array}{lcl} A=(0,0) & \rightarrow & f(A)=2\cdot0+3\cdot0=0 \\ B=(3,0) & \rightarrow & f(B)=2\cdot3+3\cdot0=6 \\ C=(6,2) & \rightarrow & f(C)=2\cdot6+3\cdot2=18 \\ D=(4,4) & \rightarrow & f(D)=2\cdot4+3\cdot4=20 \\ E=(0,2) & \rightarrow & f(D)=2\cdot0+3\cdot2=6 \end{array}$$

Concluimos:

$$max\, f=20 \ \text{ y se alcanza en } \ D=(4,4)$$
$$min\, f=0 \ \text{ y se alcanza en } \ A=(0,0)$$

4. Leemos atentamente el problema y anotamos esquemáticamente todos los datos:

- Características de las entradas:

	coste	*días*
Niños	10	x
Adultos	15	y

  - Total de espectadores hasta 20 000
  - Nº adultos no supera doble nº niños.
  - Nº adultos menos nº niños no supera 5 000
- Queremos máximos ingresos.

Ahora expresemos todos esos datos y condiciones algebraicamente:

- El ingreso está en función del nº de entradas (x e y) vendidas:

$$i=10\,x+15\,y$$

- Las incógnitas x e y no tomar valores cualesquiera, están sometidas a unas restricciones:
  - Total de espectadores hasta 20 000:

$$x+y\leq 20\,000$$

  - Nº adultos no supera doble nº niños.

$$y\leq 2\,x$$

  - Nº adultos menos nº niños no supera 5 000:

$$y-x\leq 5\,000$$

  - Evidentemente, no pueden ser negativos:

$$x\geq 0\ ,\ y\geq 20$$

Concluimos:

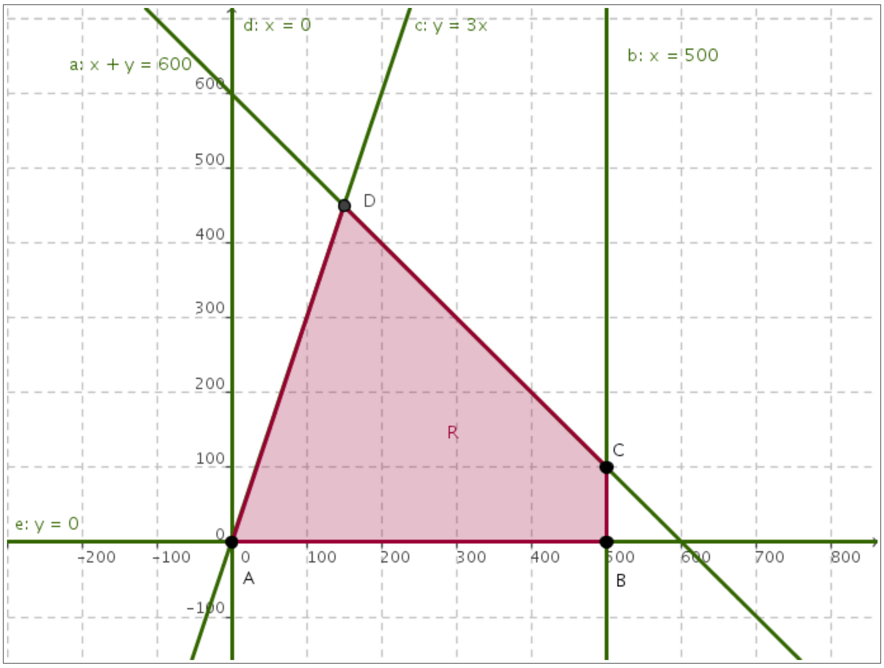
- **Objetivo**: maximizar $i=10\,x+15\,y$
- **Restricciones**:

$$\begin{cases} x\geq 0\,,\ y\geq 0 \\ x+y\leq 20\,000 \\ y\leq 2\,x \\ y-x\leq 5000 \end{cases}$$

Ya lo tenemos planteado, ahora *sólo* resta resolver...

5.

a) Aquí tenemos un gráfico (realizado con GeoGebra) que nos muestra el recinto. Se trata de un cuadrilátero:



Apreciamos claramente en el dibujo las coordenadas de los vértices de la solución del sistema de inecuaciones:

$$A=(0,0)\ ,\ B=(500,0)\ ,\ C=(500,100)\ \text{y}\ D=(150,450)$$

b) Observemos ahora que al ser

$$F(x,y)=38x+27y$$

una función lineal y R un recinto convexo y acotado, los valores extremos se alcanzarán en sus vértices:

$$\begin{array}{lcl} A=(0,0) & \rightarrow & f(A)=38\cdot 0+27\cdot 0=0 \\ B=(500,0) & \rightarrow & f(B)=38\cdot 500+27\cdot 0=19000 \\ C=(500,100) & \rightarrow & f(C)=38\cdot 500+27\cdot 100=21700 \\ D=(150,450) & \rightarrow & f(D)=38\cdot 150+27\cdot 450=17850 \end{array}$$

Concluimos:

$$max\ f=21700\ \text{ y se alcanza en }\ C=(500,100)$$

6. Leemos atentamente el problema y anotamos esquemáticamente todos los datos:

- Características de los ordenadores:

	Máximo	*Horas*	*Beneficio*	*días*
Fijos	10	4	100	x
Portátiles	15	10	150	y

  – Horas de trabajo hasta 160.

- Queremos máximo beneficio.

Ahora expresemos todos esos datos y condiciones algebraicamente:

- El beneficio está en función del nº de ordenadores (x e y) :

$$b=100x+150y$$

- Las incógnitas x e y no tomar valores cualesquiera, están sometidas a unas restricciones:
  – El número de ordenadores fijos está entre cero y 10:

$$0\leq x\leq 10$$

  – El número de ordenadores portátiles está entre cero y 15:

$$0\leq y\leq 15$$

  – Las horas de trabajo no superan las 160:

$$4x+10y\leq 160$$

Concluimos:

- **Objetivo**: maximizar $b=100x+150y$
- **Restricciones**: $\begin{cases} 0\leq x\leq 10 \\ 0\leq y\leq 15 \\ 4x+10y\leq 160 \end{cases}$

Ya lo tenemos planteado, ahora *sólo* resta resolver...