# Índice de contenidos

# Experiencias Aleatorias - Sucesos

Se llama **experiencia aleatoria** a aquella en la que, bajo condiciones fijas, pueden ocurrir un número concreto de resultados, pero no es posible predecir cuál sucederá.

En una experiencia aleatoria se denomina:

**Espacio muestral** –*E*– al conjunto de todos los posibles resultados.

**Suceso** a cualquier subconjunto de *E*.

**Suceso elemental** al formado por un único elemento de *E*.

**Suceso imposible** – $\phi$ – al que no puede ocurrir y suceso seguro al propio *E*.

Los sucesos pueden definirse por **comprensión**, a través de una propiedad característica que lo determina, o por **extensión**, señalando cada uno de sus elementos.

Lanzamos un dado de seis caras numeradas del 1 al 6.
Determinemos el espacio muestral, el suceso *A* = “saldrá mayor que dos” y el suceso “saldrá un ocho”.

El espacio muestral es:

$$E=\{1,2,3,4,5,6\}$$

El suceso *A* expresado por extensión es:

$$A=\{3,4,5,6\}$$

El suceso “saldrá un ocho” es el suceso imposible: $\phi$

## Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos $A$ y $B$, llamamos:

Suceso **unión** ($A \cup B$) al que acontece cuando ocurre al menos uno de los dos: es el suceso formado por todos los elementos de $A$ o de $B$.

Suceso **intersección** ($A \cap B$) al que acontece cuando ocurren ambos: es el suceso formado por los elementos comunes de $A$ y de $B$.

El **contrario** del suceso $A$ (${}^{c}A$) es el que sucede cuando no ocurre $A$.

Lanzamos un dado de seis caras numeradas del 1 al 6, y sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B$ = "sale mayor que 4" y $C$ = "sale par".

Determinemos los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$ y los contrarios de $A$, $B$ y $C$.

Las intersecciones contienen los resultados comunes (repetidos) de los sucesos:

$$A \cap B = \emptyset \quad , \quad A \cap C = \{2\}$$

Las uniones contienen la reunión de todos los resultados de los sucesos:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6\} \quad , \quad A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

Los contrarios están formados por los resultados de $E$ que no están en cada suceso:

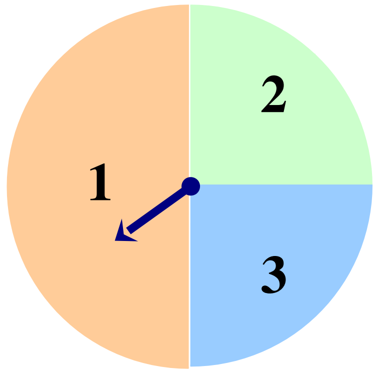
$$A^{c} = \{4, 5, 6\} \quad , \quad B^{c} = \{1, 2, 3, 4,\} \quad , \quad C^{c} = \{1, 3, 5\} = \text{"sale impar"}.$$

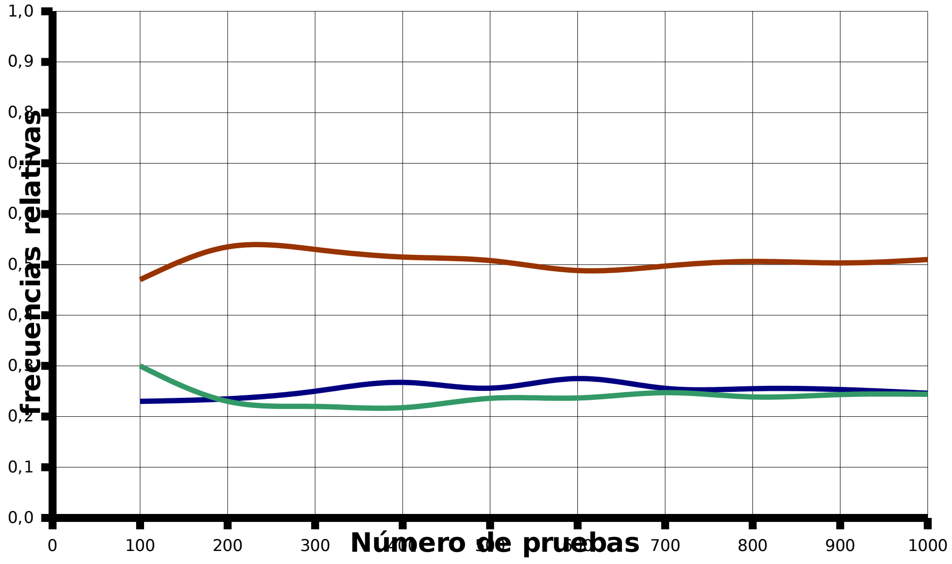
Observa que $A$ y $B$ no pueden ocurrir a la vez: por eso su intersección es vacía. Se dice que son sucesos **incompatibles**.

# La probabilidad como tendencia

Movemos la aguja de la ruleta del dibujo. ¿Qué probabilidad tiene cada número de salir?

Simulamos en el pc mil veces la experiencia:




La probabilidad de obtener 1 se estabiliza hacia 0,5 y las de obtener 2 y 3 se estabilizan en 0,25. A estos números se les llama probabilidad de los sucesos:

$$p(\{1\})=0{,}5 \quad , \quad p(\{2\})=p(\{3\})=0{,}25$$

Consideremos un exp. aleatorio que se repite $N$ veces.
Cuando $N \to \infty$ se tiene que la frecuencia relativa de cada suceso $A$ se "estabiliza" en torno a cierto valor , que llamaremos **probabilidad** del suceso $A$.

# Regla de Laplace

Consideremos un experimento con un número finito de resultados, en el que todos los resultados elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir. En este caso la probabilidad de cada suceso puede asignarse mediante la denominada **Regla de Laplace**:

La probabilidad de un suceso $A$ en un exp. aleatorio es:

$$p(A)=\frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

supuesto que todos los casos posibles son **equiprobables**.

Lanzamos una moneda dos veces y anotamos si sale cara o cruz. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cara?

Anotemos el espacio muestral y el suceso $A$ = “sale al menos una cara”:

$$E=\{CC, CX, XC, XX\} \text{ y } A=\{CC, CX, XC\}$$

Aplicando la Regla de Laplace:

$$p(A)=\frac{3}{4}$$

Del mazo de una baraja de cartas sacamos una al azar. Hallemos la probabilidad de que sea figura.

Poniendo $F$ = “sale una figura”, por la Regla de Laplace:

$$p(F)=\frac{\text{número figuras}}{\text{número de cartas}}=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$$

# Tablas de contingencia

En algunos problemas simplifica la resolución la construcción de tablas de probabilidades, denominadas tablas de contingencia. Veamos un ejemplo:

De dos sucesos, $A$ y $B$, de un experimento aleatorio sabemos que:

$$p(A)=0{,}60 \quad , \quad p(B)=0{,}50 \quad \text{y} \quad p(A\cap B)=0{,}25$$

Calculemos las probabilidades:

de que no suceda ninguno de los dos.

de que suceda exactamente uno de los dos.

Organicemos las probabilidades en una tabla de contingencia. En azul están los datos, en rojo los primeros números que obtenemos a partir de ellos y en verde los últimos completados:

| | $A$ | $A^c$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0,25 | 0,25 | 0,5 |
| $B^c$ | 0,35 | 0,15 | 0,5 |
| | 0,6 | 0,4 | 1 |

La primera probabilidad está en la tabla:

$$p(A^c\cap B^c)=0{,}15$$

El segundo suceso ocurre cuando sucede $A$ y no $B$ o $B$ y no $A$:

$$p(\text{'suceda exactamente uno de los dos'})=p(A\cap B^c)+p(A^c\cap B)=0{,}35+0{,}25=0{,}70$$

# Probabilidad condicionada

En un grupo de 50 personas hay 30 mujeres, de las que 15 están en paro, y 20 hombres, de los que 5 están en paro.
Elegimos una persona del grupo al azar: ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro ($P$)?
Sabemos que se ha elegido a una mujer ($M$): ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

En el primer caso, la respuesta es directa, con la Regla de Laplace:

$$p(P)=\frac{20 \quad parados}{50 \quad personas}=0{,}4$$

En el segundo caso, la probabilidad de estar en paro se ve condicionada por el hecho de saber que se trata de una mujer. Observa cómo se escribe "probabilidad de estar en paro sabiendo que es mujer":

$$p(P/M)=\frac{15 \quad mujeres \quad paradas}{30 \quad mujeres}=0{,}5$$

Dicha probabilidad coincide con $p(P\cap M)/p(M)$. Por ello se define:

Dado un suceso $A$ con $p(A) > 0$, se llama **probabilidad** del suceso $B$ **condicionada** por $A$ al número:

$$p(B/A)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}$$

# Dependencia e independencia

En un grupo de 60 personas hay 30 mujeres, de las que 15 están en paro, y 20 hombres, de los que 10 están en paro.
Sabemos que se ha elegido a una mujer (*M*): ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro (*P*)?

Ahora la proporción de mujeres paradas coincide con la de personas paradas en el grupo: la probabilidad de estar parado no se ve condicionada por el sexo:

$$p(P/M)=\frac{15}{30}=0,5=p(P)$$

Se dice por ello que los sucesos $M$ y $P$ son independientes.

En general, dos sucesos son independientes cuando la realización de uno de los sucesos no influye en la probabilidad de que suceda el otro.
Una definición equivalente es:

Dos sucesos $A$ y $B$ se dice que son **independientes** cuando:

$$p(B\cap A)=p(A)\cdot p(B)$$

En caso contrario se dice que son sucesos **dependientes**.

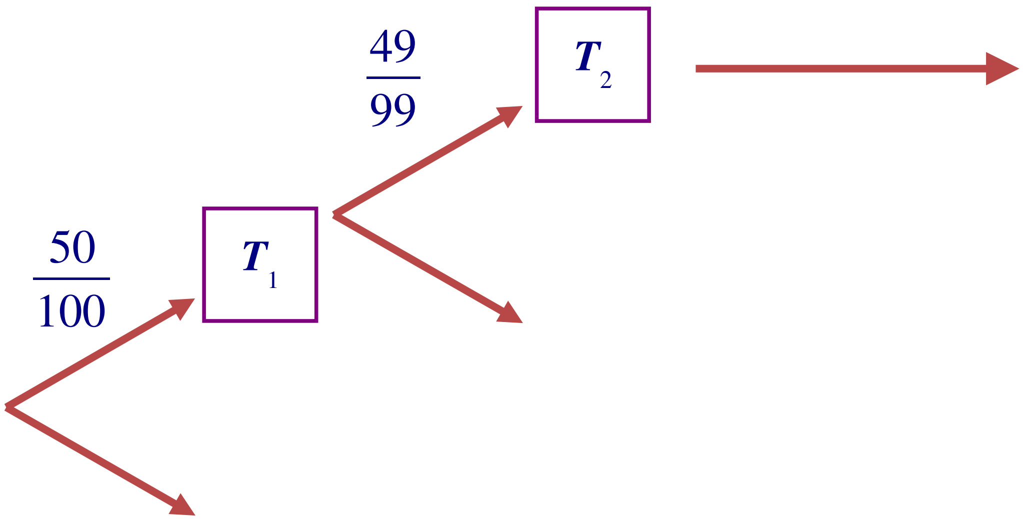
# Probabilidad de la intersección

A veces es complicado hallar directamente la probabilidad de una intersección, y se usa la siguiente fórmula que obtenemos de la de la probabilidad condicionada, despejando:

$$p(B\cap A)=p(A)\cdot p(B/A)$$

El temario de unas oposiciones tiene un total de 100 temas. Un opositor se ha preparado 50 para el examen, consistente en contestar a dos temas extraídos al azar. Hallaremos la probabilidad de que haya estudiado ambos temas.

Pongamos $T_1$ = "estudió el primer tema" y $T_2$ = "estudió el segundo tema". Visualmente:




$$p(T_2\cap T_1)=\frac{50}{100}\cdot\frac{49}{99}=\frac{49}{198}$$

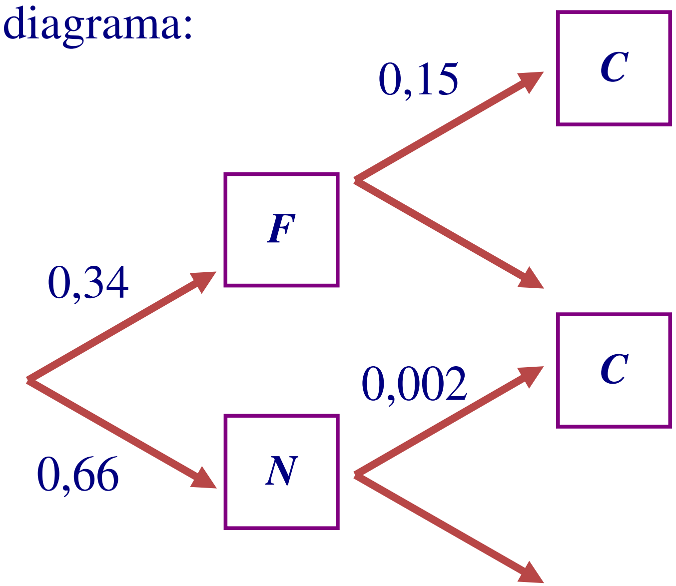
Con las fórmulas:

$$p(T_2\cap T_1)=p(T_1)\cdot p(T_2/T_1)=\frac{50}{100}\cdot\frac{49}{99}=\frac{49}{198}$$

# Probabilidad total

En una población, el 34% de sus individuos es fumador ($F$). En éstos, la probabilidad de desarrollar un cáncer del aparato respiratorio es de 0,15, mientras que la padecerlo un no fumador es de 0,002. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo de esa población desarrolle un cáncer ($C$)?

Con un diagrama:




$p(F \cap C) = 0{,}34 \cdot 0{,}15 = 0{,}051$

Probabilidad Total: $p(C) = 0{,}051 + 0{,}00132 = 0{,}05232$

$p(N \cap C) = 0{,}66 \cdot 0{,}002 = 0{,}00132$

Con fórmulas: $p(C) = p(F) \cdot p(C/F) + p(N) \cdot p(C/N) = 0{,}05232$

Dado un sistema completo de sucesos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, para cualquier suceso $S$ es:

$$p(S) = p(A_1) \cdot p(S/A_1) + p(A_2) \cdot p(S/A_2) + \dots + p(A_n) \cdot p(S/A_n)$$

# Teorema de Bayes

Siguiendo con el ejemplo anterior: se toma una persona que ha desarrollado un cáncer en el aparato respiratorio. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fumador?

Esto es una Probabilidad Condicionada a Posteriori:

$$p(F/C)=\frac{p(F\cap C)}{p(C)}=\frac{0{,}051}{0{,}05232}\approx 0.9748$$

A continuación el **Teorema de Bayes**, fórmula general que generaliza lo anterior:

Dado un sistema completo de sucesos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, para cualquier suceso $S$ se verifica:

$$p(A_k/S)=\frac{p(A_k)\cdot p(S/A_k)}{p(A_1)\cdot p(S/A_1)+p(A_2)\cdot p(S/A_2)+\ldots+p(A_n)\cdot p(S/A_n)}$$

Las probabilidades $p(A_k)$ se denominan probabilidades a **priori**.

Las probabilidades $p(S / A_k)$ se denominan **verosimilitudes**.

Las probabilidades $p(A_k / S)$ se denominan probabilidades a **posteriori**.