7 CÁLCULO DE PROBABILIDADES

EXPERIENCIAS ALEATORIAS – SUCESOS

Se llama **experiencia aleatoria** a aquella en la que, bajo condiciones fijas, pueden ocurrir un número concreto de resultados, pero no es posible predecir cuál sucederá.

En una experiencia aleatoria se denomina:

- **Espacio muestral** –*E*– al conjunto de todos los posibles resultados.
- **Suceso** a cualquier subconjunto de *E*.
- **Suceso elemental** al formado por un único elemento de *E*.
- **Suceso imposible** – $\emptyset$ – al que no puede ocurrir y suceso seguro al propio *E*.
- Por S al conjunto de todos los sucesos.

Los sucesos pueden definirse por **comprensión**, a través de una propiedad característica que lo determina, o por **extensión**, señalando cada uno de sus elementos.

OPERACIONES CON SUCESOS

Dados dos sucesos A y B, llamamos:

- Suceso **unión** $A\cup B$ al que acontece cuando ocurre al menos uno de los dos: es el suceso formado por todos los elementos de A o de B.
- Suceso **intersección** $A\cap B$ al que acontece cuando ocurren ambos : es el suceso formado por los elementos comunes de A y de B.
- Suceso **diferencia** $A-B$ al que acontece cuando ocurre A y no B; esto es, es el formado por los elementos de A que no están en B.

El **contrario** del suceso A es $\overline{A}=S-A$

Diremos que los sucesos A y B son **incompatibles** cuando $A\cap B=\emptyset$.

Recordemos el contrario de la unión y de la intersección:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

CONCEPTO DE PROBABILIDAD

Si un exp. aleatorio se repite N veces y un suceso A se verifica en n_A de ellos, se llama **frecuencia relativa** de A al número

$$f(A)=\frac{n_A}{N}$$

Cuando $N\to\infty$ se tiene que $f(A)$ se estabiliza hacia cierto valor $p(A)$, que llamaremos **probabilidad** del suceso A.

REGLA DE LAPLACE

La probabilidad de un suceso A en un exp. aleatorio es:

$$p(A)=\frac{\textit{número de casos favorables a A}}{\textit{número de casos posibles}}$$

supuesto que todos los casos posibles son equiprobables.

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

En todo exp. aleatorio se verifica:

- $p(A)\geq 0$ para todo suceso A.
- $p(E)=1$
- $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

Además:

- $p(\overline{A})=1-p(A)$
- $p(\emptyset)=0$

7 CÁLCULO DE PROBABILIDADES

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Si A y B son sucesos en un exp. aleatorio, con $p(A)\neq 0$, la "probabilidad de B **condicionada** por A" o la "probabilidad de que ocurra B supuesto que ha sucedido A" es:

$$p\left(B/A\right)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

PROBABILIDAD COMPUESTA

Lo anterior permite obtener la probabilidad de la intersección a partir de cada factor:

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot\left(B/A\right)$$

Para tres factores:

$$p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot\left(B/A\right)\cdot p(C/A\cap B)$$

Lo anterior puede generalizarse para cualquier número de factores.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Diremos que los sucesos A y B son **independientes** cuando

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$$

Si $p(A)\neq 0$, ello equivale a

$$p(B/A)=p(B)$$

TEOREMA DE PROBABILIDAD TOTAL

En un exp. aleatorio, un **sistema completo de sucesos** es un conjunto $S_1,\dots,S_n$ de sucesos de probabilidad positiva e incompatibles dos a dos con

$$S_1\cup\dots\cup S_n=E$$

Si $S_1,\dots,S_n$ es un sistema completo de sucesos entonces para todo suceso A se tiene:

$$p\left(A\right)=\sum_{k=1}^{n} p\left(S_k\right)\cdot p\left(A/S_k\right)$$

TEOREMA DE BAYES

Si $S_1,\dots,S_n$ es un sistema completo de sucesos entonces para todo suceso A es:

$$p\left(S_i/A\right)=\frac{p\left(S_i\right)\cdot p\left(A/S_i\right)}{\sum_k p\left(S_k\right)\cdot p\left(A/S_k\right)}$$

La probabilidad $p\left(S_i/A\right)$ se conoce como probabilidad "**a posteriori**".

EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Hay experimentos aleatorios que pueden considerarse como la concatenación de varios exp. aleatorios "más simples". En ese caso se dice que cada uno de éstos es una **fase** o etapa, y que estamos ante un **experimento compuesto**.

Se dice que las fases de un exp. compuesto son fases **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no influye en el resultado de las siguientes.

Supongamos un experimento formado por la concatenación de tres exp. aleatorios. Sea S el suceso "ha ocurrido el suceso S_k en la fase k" (k = 1, 2, 3).

El Teorema de la Probabilidad Compuesta nos dice que:

$$p(S)=p(S_1)\cdot(S_2/S_1)\cdot p(S_3/S_1 \text{ y } S_2)$$

Si las fases del experimento son independientes, entonces es:

$$p(S)=p(S_1)\cdot(S_2)\cdot p(S_3)$$