4 CÁLCULO DE DERIVADAS

DEFINICIÓN Y NOTACIONES

Sea f una **función continua** definida en el intervalo abierto $I=(a,b)$. Se llama **función derivada** a la definida por

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

para cada valor $x\in I$ en el que existe ese límite.

Si para el valor $x = a$ existe la derivada, se dice entonces que la función es **derivable** para ese valor.

Existen varias formas de designar a la derivada de una función. He aquí las más comunes:

$$y' \ , \ f'(x) \ , \ Df(x) \ , \ \frac{df}{dx}(x) \ ,$$

DERIVADAS SUCESIVAS

A la derivada de una función también se la denomina **derivada primera**. Si volvemos a derivar la derivada primera de una función, obtenemos la llamada **derivada segunda**; la derivada de la derivada segunda se denomina **derivada tercera**; y así sucesivamente. Éstas son las llamadas **derivadas sucesivas** de una función:

$$f\xrightarrow{D}f'\xrightarrow{D}f''\xrightarrow{D}f'''\xrightarrow{D}\dots$$

DERIVADAS Y OPERACIONES

Aquí tenemos las reglas que relacionan las operaciones elementales y las derivadas:

$$D(f\pm g)=f'\pm g'$$
$$D(k\cdot f)=k\cdot f'$$
$$D(f\cdot g)=f'\cdot g+f\cdot g'$$
$$D\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$
$$D\left[f\left(g(x)\right)\right]=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

TABLA DE DERIVADAS

$Dk=0$	$Dx=1$
$Dx^n=n\,x^{n-1}$	$D\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$De^x=e^x$	$Da^x=a^x(\ln a)$
$D\ln x=\dfrac{1}{x}$	$D\log_a x=\dfrac{1}{x\cdot(\ln a)}$
$D\,\mathrm{sen}\,x=\cos x$	$D\cos x=-\mathrm{sen}\,x$
$D\tan x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$D\cot x=\dfrac{-1}{\mathrm{sen}^2 x}$
$D\,\mathrm{arcsen}\,x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\arccos x=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D\arctan x=\dfrac{1}{1+x^2}$	$D\sqrt[n]{x}=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

Para estudiar la derivabilidad de una función en un valor concreto $x = a$

Primero estudiamos la continuidad en $x = a$.

Nos podemos encontrar ahora tres casos:

- Caso 1: f es **discontinua** en $x = a$

  Tenemos que f **no es derivable** en $x = a$

- Caso 2: f es **continua** en $x = a$.

  Tenemos que f **puede** ser derivable en $x = a$.

  Debemos ahora hallar las **derivadas laterales**:

  $$f'(a+)=\lim_{x\to a+}f'(x) \quad y \quad f'(a-)=\lim_{x\to a-}f'(x)$$

  Ahora hay dos posibilidades:

  – Caso 2*a*: Las derivadas laterales **no coinciden**.

  Resulta que f **no es derivable** en $x = a$

  Es lo que se llama un punto anguloso.

  – Caso 2*b*: Las derivadas laterales **coinciden** (L)

  Resulta que f es **derivable** en $x = a$

  Resulta así que $f'(a)=L$