2 MATRICES Y DETERMINANTES

GENERALIDADES

Una **matriz** es una **tabla numérica** de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Se dice que es una matriz de **dimensiones** $m\times n$, ya que tiene m **filas** y n **columnas**.
- Al elemento que ocupa la fila i y la columna j se le designa por a_{ij} ó a_i^j.

Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y coinciden los términos que ocupan el mismo lugar en ambas.

La **traspuesta** de la matriz A $(m\times n)$ es la matriz A^t $(n\times m)$ que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas.

Algunos tipos de matrices:

- **Matriz fila**: aquella que tiene una única fila.
- **Matriz columna**: aquella con una sola columna.
- **Matriz cuadrada** : la que tiene igual número de filas y columnas.
- **Matriz unidad**: matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal son todos unos y los restantes son todos ceros. Se la designa I_n.

SUMA Y PRODUCTO POR ESCALARES

La **suma** de las matrices A y B, con las mismas dimensiones, es otra matriz C de la misma dimensión con $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Dicha matriz se designa por $A + B$.

La **opuesta** de $A=(a_{ij})$ es $-A=(-a_{ij})$.

La **resta** de las matrices A y B, con las mismas dimensiones, es $A+B=A+(-B)$.

El **producto del número** real k **por una matriz** A es otra matriz de iguales dimensiones, que se obtiene al multiplicar cada elemento de A por dicho número.

PRODUCTO DE MATRICES

Sea A una matriz de dimensiones $m\times p$ y B una matriz de dimensiones $p\times n$.

Llamaremos **matriz producto** de A por B a la matriz C de dimensiones $m\times n$ en la que

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}$$

Dicha matriz se designa por $C=A\cdot B$ o $C=AB$.

Importante recordar:

1. Para poder multiplicar dos matrices es preciso que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda.
2. El producto de matrices **no es conmutativo**.

MATRIZ INVERSA

Diremos que las matrices A y B de $M_{n\times n}$ son **inversas** cuando su producto es la matriz unidad:

$$A\cdot B=B\cdot A=I_n$$

Se dice que la matriz B es la inversa de A, y se escribe $B=A^{-1}$.

Recordemos:

1. Sólo las matrices cuadradas pueden tener inversa.
2. No toda matriz $A\neq 0$ tiene inversa.

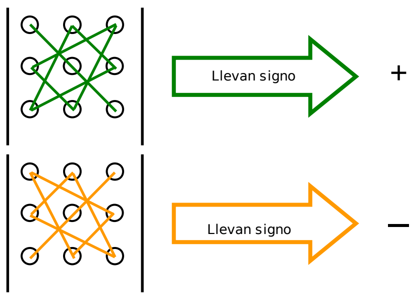
DETERMINANTES

El **determinante** de una matriz cuadrada es un **número** que se halla a través de una fórmula.

- Determinantes de **orden 2**:

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a\cdot d-b\cdot c$$

- Para los de **orden 3** recordemos la regla de **Sarrus**:



2 MATRICES Y DETERMINANTES

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Propiedad 1: El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta:

$$det(A)=det(A^t)$$

Propiedad 2: Si multiplicamos cada elemento de una línea del determinante por un número, el determinante queda multiplicado por ese número:

$$\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Propiedad 4: El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes:

$$det(A\cdot B)=det(A)\cdot det(B)$$

Propiedad 5: Un determinante cambia de signo al permutar dos líneas paralelas:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a' & a & a'' \\ b' & b & b'' \\ c' & c & c'' \end{vmatrix}$$

Propiedad 6: Un determinante con una línea de ceros es cero:

$$\begin{vmatrix} a & a' & 0 \\ b & b' & 0 \\ c & c' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 7: El determinante de una matriz en la que una línea es combinación lineal de otras paralelas es cero:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a+a' \\ b & b' & b+b' \\ c & c' & c+c' \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 8: El determinante de una matriz no cambia si a una línea añadimos una combinación lineal de otras paralelas:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a''+ka \\ b & b' & b''+kb \\ c & c' & c''+kc \end{vmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

Sea A una matriz cuadrada. El adjunto del elemento elemento a_{ij} , designado por A_{ij} , al producto del número $(-1)^{i+j}$ por el determinante obtenido de A al eliminar la fila i y la columna j

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

1. A es invertible si y sólo si es $det\,A\neq 0$
2. Si $det\,A\neq 0$ la inversa de A es la matriz

$$A^{-1}=\frac{1}{det\,A}\cdot(Adj\,A)^t$$

donde la matriz $Adj\,A=(A_{ij})$ es la adjunta de A.

SISTEMAS DE ECUACIONES

La expresión matricial de un sistema lineal es:

$$C\cdot X=B$$

donde C es la matriz de coeficientes, X la de las incógnitas y B la de los términos independientes.

Si la matriz C de los coeficientes es cuadrada e invertible, es posible resolver el sistema usando de la matriz inversa de la siguiente forma:

$$C\cdot X=B \;\rightarrow\; C^{-1}\cdot C\cdot X=C^{-1}\cdot B \;\rightarrow\; X=C^{-1}\cdot B$$

REGLA DE CRAMER

Consideremos el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

Si el determinante de los coeficientes es distinto de cero, entonces el sistema es compatible determinado.

La solución viene dada por

$$x_k=\frac{|C_k|}{|C|} \quad ,, \quad k=1,\ldots,n$$

donde C_k designa a la matriz que se obtiene al sustituir en C la columna k por la matriz columna de los términos independientes.