1 SISTEMAS DE ECUACIONES

ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** es una ecuación polinómica de primer grado con una o varias incógnitas.

Una ecuación lineal de **dos incógnitas**

$$a\,x+b\,y=c$$

tiene infinitas soluciones. Cada una de ellas es una pareja de valores (x,y) .

Si representamos esas infinitas parejas en unos ejes cartesianos XY, obtenemos una recta. Así, la **interpretación geométrica** es una **recta**, donde cada punto de ella es una solución de dicha ecuación.

Análogamente, una ecuación lineal de **tres incógnitas**

$$a\,x+b\,y+c\,z=d$$

puede interpretarse como un **plano** en el espacio XYZ.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un **sistema** de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un conjunto de igualdades de la forma:

$$[S]:\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &=& b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &=& b_2\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots &=& \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &=& b_m \end{cases}$$

Donde:

- a_{ij} son llamados **coeficientes**
- b_j son llamados **términos** independientes
- x_i son las **incógnitas**, es decir, números reales desconocidos que deben verificar simultáneamente las m igualdades del sistema.

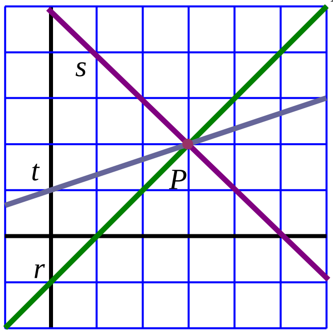
- Diremos que la sucesión de números reales $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ es una **solución** del sistema S si al sustituir en el sistema la incógnita x_i por s_i obtenemos m igualdades numéricas.
- **Resolver** un sistema es averiguar si un sistema tiene solución, encontrando **todas sus soluciones**, si las hubiera.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS LINEALES

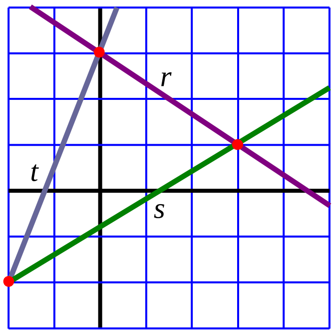
Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es:

- **Incompatible** si no tiene ninguna solución.
- **Compatible determinado** si tiene solución única.
- **Compatible indeterminado** si tiene infinitas soluciones.

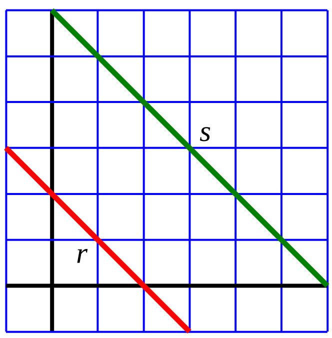
Interpretación de sistema 3×2 compatible determinado: tres rectas secantes en un punto:



Interpretación de sistema 3×2 incompatible: tres rectas secantes dos a dos, pero las tres no tienen



Interpretación de sistema 2×2 incompatible: dos rectas paralelas:



1 Sistemas de Ecuaciones

Sistemas Equivalentes. Transformaciones

Diremos que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen las **mismas soluciones**.

Si sometemos un sistema de ecuaciones a las siguientes **transformaciones** obtendremos un sistema equivalente:

- Permutar ecuaciones.
- Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.
- Suprimir, o añadir, una ecuación que es combinación lineal de otras.
- Sustituir una ecuación por otra que es el resultado de añadirle una combinación lineal de otras ecuaciones.

Sistemas Escalonados: Método de Gauss

A continuación se muestra un sistema 3×3 que es escalonado:

$$\begin{cases} \square x+\square y+\square z=\square \\ \quad\;\; \square y+\square z=\square \\ \qquad\quad\;\; \square z=\square \end{cases}$$

El **Método de Gauss** es un procedimiento para obtener un sistema escalonado y equivalente a uno dado, usando las transformaciones anteriores.

Sistema incompatible.

$$S:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-2z=0 \end{cases} \quad \left| \begin{matrix} e'_2=e_2-e_1 \\ e'_2=e_3-2e_1 \end{matrix} \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ 0=-2 \end{cases}$$

Aparece una igualdad imposible.

Sistema compatible determinado.

$$S:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-z=0 \end{cases} \quad \left| \begin{matrix} e'_2=e_2-e_1 \\ e'_2=e_3-2e_1 \end{matrix} \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ z=-2 \end{cases}$$

En el escalonado la tercera igualdad nos da una incógnita. Hallamos la solución en cascada:

$$\left| \begin{matrix} e_3 & \to & z=-2 \\ e_2 & \to & y=-2+2z=-6 \\ e_1 & \to & x=1-2y+z=11 \end{matrix} \right.$$

Sistema compatible indeterminado.

$$S:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-2z=2 \end{cases} \quad \left| \begin{matrix} e'_2=e_2-e_1 \\ e'_2=e_3-2e_1 \end{matrix} \right\rangle \quad S':\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

Vemos que la tercera ecuación se cumple siempre. Una incógnita toma cualquier valor. Solución:

$$\left| \begin{matrix} e_3 & \to & z=t \\ e_2 & \to & y=-2+2z=-2+2t \\ e_1 & \to & x=1-2y+z=5-3t \end{matrix} \right.$$